九州大学数学ⅠAⅡB を受講する皆さんへ

このテキストを手にしている皆さんは，志高くここまで勉強を進めてきたと思います．その努力を，**九州大学に通用する力に仕上げるために必要なこと**とは？　…それをお話しする前に，まずは皆さんは「細やかな技術」がきちんと身についていますか？　とくに高２までに数学の各分野のさまざまな問題を通じ，皆さんはさまざまな技術を磨いてきたはずです．もし不足している部分・分野が自覚された時には，速やかに技術を再び磨いておいてください．

さて，数学においてはよく「応用力がない」という声を耳にします．それはいわゆる「公式暗記型」でしか数学を勉強していない人によく見られる気がします．「２次方程式が異なる２つの実数解をもつ」 ⇒ 「判別式 $D>0$」といったように．数学で大切なのは「⇒」，いわゆる「プロセス」の部分です．そこに至る「背景」「理由」ですね．それを理解した上で「⇒」をショートカットする分にはまったくかまいませんが，皆さんはちゃんとそれを自覚してきましたか？

そして，「応用力」とはまさに**「プロセス力」**と言えましょう．問題を見たとき，その問題が語っていることをその字面の奥に潜む部分まで読み込み，どこに自分の手で解決しなければならない「壁」があるのかを考えるわけです．さらに壁を越えるために何が必要か．その「鍵」がこの「⇒」に隠されています．そうです，それを選択すべき「理由」があるのです．はたまた，時には形の美しさといった，数学の枠を越えた部分にヒントが隠されていることもあるでしょう．それを見抜き，立式し，磨いた技術をもって計算し答案として仕上げていくのです．

このテキストは，この**「プロセス力」を養うために必要な問題が厳選**されています．後述しますが，このテキストの使い方に従い，画面を通じて伝わってくるものを目で，耳で，肌で吸収し，自分のものとするための**復習を実践**すれば（ここ大事！），無限に広がる数学の世界の扉は確実に開かれます．今日の授業から何が皆さんに伝わってきたのか．それを反芻し，ほかの異なる場面においても**「考える」癖をつける**．それこそが，九州大学に通用する力となりましょう．

そうです．**「この講座だけをやればいい」のではありません．**「傾向と対策」というものは，大学入試には存在しません．「たまたま」出ることが多かった分野に絞って勉強することのリスクが高すぎるからです．扉を開いた後は，自ら歩んでいくことです．そのために必要な問題集もご紹介いたします．扉が開かれているのにその先に進まない人はいないでしょう．なぜならば，その先にあなた方が目指す「九州大学」があるのですから．

この講座を見るたびに，さまざまな「開かずの扉」が音を立てて開くでしょう．決してテクニカルなことは要求しません．必要なのは，磨いてきたはずの**技術**，そしてその技術を活かすべくこの講座をとらえる**謙虚な姿勢**，そして受かりたいという**気持ち**です．その気持ちで授業を聞き，もし感動することがあっても，感動したという事実だけでその日を終わらないでください．せっかく開きかけた扉も，時間がたてば自動的に閉まりますよ．**真に感動すべきは，自分で「未知なる道」を切り開いた時**です．その感動をかみしめながら，一歩，また一歩，九州大学を目指して前進しましょう．何かを見失ったとき，忘れた時，私は，指南役としていつもあなたのそばに現れます．

山内　恵介

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜九州大学数学ⅠAⅡB　目次＞

第１講　証明，論証
第２講　図形と方程式
第３講　微分法・積分法①
第４講　微分法・積分法②
第５講　ベクトル
第６講　数列
第７講　場合の数・確率
第８講　整数問題
第９講　総合問題⑴
第 10 講　総合問題⑵

＜講座の受講の仕方＞

①　予習について

すべての講は「講義問題」３問で形成されています．まずは何も見ないで問題をノートまたはルーズリーフに解いてみましょう．自分が問題をとらえる力がどこまで養われているかわかります．

ここでは必ずしも答案形式にこだわる必要はありません．掲載されている問題はすべて実際に九州大学の入試に出題されたものですから，最後まで解けないことも多いかもしれません．それでも，いろいろな可能性を追ってみましょう．

ちなみに１問にかけてよい時間はおよそ 20 分です．もちろん, このまま続ければ(おそらく) 最後の答えに行き着く！　というところまで行っている場合は，30 分まではかけて結構です．３問でおよそ１時間から１時間半．数学に本気で向き合う時間です．

②　講義について

予習をすることで自分の見るべきポイントが押さえられた状態，これが講義を受ける前に必要な準備です．それができている状態で授業を見て，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください．問題が掲載されているページはすべて見開きの構成となっており，余白（「Note」欄）がふんだんに用意されています．ここには何でも「自由」に書いて残すことができます．「自由」とはどういうことか．それは，このスペースに画面上の黒板に書かれたことを「書き写すのみ」に留まることは厳禁，ということです．授業時間は限られていますから，

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

先生はすべてを黒板に書くことはしていません．よって，授業を聞き，先生が話したことや自分なりに感じ取ったことを記しておくべきなのです．きれいにまとめても誰も見てくれませんよ．あくまで「Note」＝「記録」です．後から見て自分だけがわかる程度でいいのです．

ちなみにここまでの人生で書く速度を速くする努力をしてこなかった人へ．この講座はいつでも止めたり戻ったりできます．もちろん，聞きながら書くという訓練はこれからでも遅くありませんよ．ちなみに止められるからといって「考えすぎ」は逆に厳禁です．あなた方に残された時間は限られています．勉強は数学だけじゃないでしょう？　大枠をとらえた上で，細かいところに後からこだわる姿勢も大事です．もちろんそれでも「今日はこれを解決しないと眠れない！」という人…．明日は寝不足で学校に行くことになるかもしれませんが，先生がとことんお付き合いしますよ．そんな日も時にはあっていいのかもしれませんね．

ちなみに各講義を通じ，この問題から得られることを「Point Pickup」と題して簡潔にお伝えいたします．自分で感じたことも含めテキストに残しておきましょう．

③　復習について　その１

まずは問題によって語られた「ストーリー」を，テキストの問題や Point Pickup を見ながらもう一度頭に描いてみましょう．もし思い出せない場面があったらノートを見てみましょう．そしてそこで描いた世界観を元に，次に自分で実際に問題を解いてみましょう．予習と異なり，ここでは計算も含め実際に丁寧に記述していきましょう．もし全然歯がたたない場合は，もう一度講座を視聴することをお勧めします．

もちろん数学という科目の特性上，あなたの技術力の不足などで途中で止まってしまうかもしれません．また，あなたの想いをどう記述で表現していいかわからない場合もあるかもしれません．安心してください．すべての問題に「模範解答」がついています．必要に応じ，画面を見る，またはプリントアウトして参考にしてください．

講義問題の復習をこのように欠かすことなく行い，解答を自分で書き上げることができた時が，先生から得たものが自分のものになった瞬間です．こうして書き上げた答案を，テキストと一緒に保存しておきましょう．

また１回の復習で納得のいくものが書けないケースもあるかと思います．そういった場合は，時間をおいて今一度問題を解き直すことをお勧めします．チャンスは「空き時間」「隙間時間」です．一度自分で取り組んだことは，次は確実に速度と正確性が上がります．それを実感することも成長の糧となりましょう．

④　復習について　その２

③が終わったら，新たな問題にチャレンジしたくなるでしょう．「練習問題」が各講２題ずつ用意してあります．講義の問題に関連する問題もあれば，発展的な内容もあります．また問題によって難易度もさまざまです．

解き終えたら，「解答」を見て自分の到達具合をチェックしてみましょう．解答にはワンポイ

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ントのコメントもついています．この「練習問題」もまた，皆さんの成長のために厳選した問題です．より理解を深めていただきたく思います．

以上を確実に繰り返すことにより，確実に「自分で考える」領域に至ることができます．それはもしかしたら自分の力だけで到達したかもしれない領域です．しかしながら，もしそうであったとしても，そこに至る確実性の高いものがあるとしたら，それを選択することによって浮いた時間や労力をほかの学習に回すことができるでしょう．この講義がそういう目的をかなえるための存在であること，それは繰り返しますがサイクルを確実に構築した人だけがわかることです．みなさんの日々の努力，期待しています．

☆数学ⅠAⅡB 「おすすめの参考書」☆

この講義と同時並行で進めると効果的な書籍を以下に挙げておきます．学校の授業で課せられた課題等とのバランスを見ながら，着々と進めていきましょう．

ちなみに数学の日々の自主学習において，詳細な解答がないものはまったくお勧めできません．答えに行き着く「プロセス」が数学であることは前述した通りです．最後の「答」しかない問題集やプリントではお話になりません．自分で考えれば必ず答えにたどり着く！とおっしゃられる方もおりますが，「各知識の欠如」「時間の制約」「経験不足」「他教科とのバランス」が全く考慮されておらず，「自分ができる（できてきた）ことは他人もできるはず」という無責任な発言とも言えましょう．受験勉強，特に受験が近づいてきている時期に求められるのは，「時間対効果」です．

よい道筋を参考に，自分で切り開く時の「道標」とする．以下に挙げるのはそんな本です．また，センター試験の勉強に本格的に入ると，数学の記述力が確実に落ちます．良問を通じた日々のたゆまぬ記述訓練がそれを防ぐことになるでしょう．

【入試突破のための基礎固め】

・「１対１対応の演習」（東京出版）

例題を元に，入試の典型的解法を身につけることができます．Ⅰ・Ａ・Ⅱ・Ｂ・Ⅲ・Ｃの全６冊です．教科書およびチャート式などの参考書で積み上げてきた知識をもう一歩上の実力に代えるための本です．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【入試問題集】

・新数学スタンダード演習ⅠAⅡB　（東京出版）

入試の典型問題を網羅したものです．分野別となっていて，日々のペースメーカーに最適です．「大学への数学」という月刊誌の４月増刊号です．

増刊号ですから，入試が近づくにつれて各書店の在庫がなくなりますので注意.

・理系数学の良問プラチカ　数学ⅠAⅡB　（河合塾 SERIES）

良問と詳細な解説が掲載されており，自主学習に適しています．ちなみに「文系数学の良問プラチカ」は，この「理系数学」よりレベルが高いため最初に手をつけないように！

・九州大学　赤本　（教学社）

有名な過去問題集です．第一志望が決定したら購入しておきましょう．傾向を知る，というより近年こういうレベルの問題が出ている，ということを肌で感じることができます.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　証明，論証

$\boxed{1}$　［1］　$p=\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}$，$q=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}$ とする．$x>y>z$ のとき p と q の大小を比べよ．

［2］　α，β は $0<\alpha<\beta$ を満たす定数とする．$x>0$，$xy\geqq 1$ を満たすとき，$\alpha(x-y)+\beta(x+y)$ を最小にする x，y の値およびその最小値を α，β で表せ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1) $x \geqq y > 0$ のとき，不等式 $\dfrac{1+x}{x} \leqq \dfrac{1+y}{y}$ が成り立つことを示せ.

(2) 不等式 $\dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|} \geqq \dfrac{|x+y|}{1+|x+y|}$ が成り立つことを示せ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　次の各命題が真であることを証明せよ．

(1)　$\sqrt{2}$ は無理数である．

(2)　a を整数とする．2 次方程式 $x^2+5x+a=0$ が有理数解をもつならば，a は偶数である．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　図形と方程式

1 (1)　点 $(a,\ b)$ に関して点 $(p,\ q)$ と対称な点の座標を求めよ．

(2)　3 次関数 $y=x^3+Ax^2+Bx+C$ のグラフはある点に関して点対称である．その点の座標を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　2定点O(0, 0), A(2, 1)と円$(x-1)^2+(y-1)^2=1$の周上を動く点Pがある．3点O，A，Pが同一直線上にないとき，次の問いに答えよ．

(1)　△OAPの重心の軌跡を求めよ．

(2)　△OAPの面積の最大値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　原点Oから出る半直線 l と x 軸の正の向きとのなす角を θ とする $\left(ただし，0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A(2, 0)，B(4, 0) とし，点Pは l 上の点とする．OP$=r$ $(\neq 0)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\cos\angle$OPA，$\cos\angle$OPB をそれぞれ r と θ を用いて表せ.

(2) 点PがAP＋BP を最小にする l 上の点であるとき，$\angle$OPA と $\angle$OPB の関係式を求めよ．また，このとき r を θ で表せ.

(3) 点Pが(2)の条件を満たすとき，点Pの描く軌跡を求め，図示せよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　微分法・積分法①

1　放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上の原点と異なる点 $\mathrm{A}\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$ における接線と x 軸との交点を P とし，直線 AP と x 軸の正の向きとのなす角を θ とする．x 軸を，点 P のまわりに正の向きに角 2θ だけ回転させて得られる直線を L とする．次の問いに答えよ．ただし，$a\neq\pm1$ とする．

(1)　直線 L を表す式を求めよ．

(2)　直線 L と放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ との交点の x 座標の値がいずれも $\frac{4a}{1-a^2}$ より小さくなるような a の取り得る値の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　関数　$f(x)=\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}(a+b)x^2+\frac{1}{2}(b+1)x$　を考える．

(1)　$a=0$ のとき，関数 $f(x)$ が $x>-1$ において常に増加するための b の条件を求めよ．

(2)　関数 $f(x)$ が $x>-1$ において常に増加するための a，b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　2つの正方形の面積の和を $2a^2$，周の和を $8k$ とする．このとき次の問いに答えよ．

(1)　それぞれの正方形を1面とする2つの立方体の体積の和 V を a と k を用いて表せ.

(2)　a を正の定数とするとき，それぞれの正方形が実際に作られるための k の範囲を求めよ.

(3)　(2)の条件下で k を動かしたとき，V の最小値を求めよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　微分法・積分法②

1　$0 \leqq x \leqq 1$ において，$ax^2+b \geqq (x+1)^2$ が成り立つとき，定積分 $\int_0^1 (ax^2+b)dx$ を最小にする a，b と，そのときの定積分の値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　実数 α と β は　$\alpha \leqq \beta$, $\alpha \neq 0$, $\beta > 0$ を満たし　$f(x)=\dfrac{3}{\alpha\beta}(x-\alpha)(x-\beta)$　とする.

$\alpha=\beta^2$ のとき, $\displaystyle\int_0^\beta |f(x)|dx$ を最小にする β の値を求めよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [1](1) $(a,\ b)$ を平面上の点とする．2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が実数解をもち，それら 2 実数解の絶対値の和が 1 以下であるとき，点 $(a,\ b)$ が存在する範囲を求め，図示せよ．

(2) (1)で求めた範囲の面積を求めよ．

[2](1) 円 $x^2+y^2=4$ と放物線 $C：y=x^2+2$ の両方に接する直線は 3 本ある．これらの接線の方程式を求めよ．

(2) (1)における 3 本の接線のうち，x 軸の正の部分と交わる接線を l_1，x 軸に平行な接線を l_2 とする．接線 l_1，l_2 および放物線 C とで囲まれる部分の面積を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第5講　ベクトル

1 ［1］　$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$ とする．平行四辺形 ABCD の辺 BC を $(1-\alpha):\alpha$ に内分する点を P とし，辺 CD を $\beta:(1-\beta)$ に内分する点を Q とする．また，線分 QP と平行四辺形の対角線 AC の交点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$ として次の問いに答えよ．

⑴　長さの比 $\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RP}}$ および $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}}$ を求めよ．

⑵　$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AD}=1$，$\angle\mathrm{DAB}=60^\circ$ とするとき，$\triangle\mathrm{AQR}$ の面積を求めよ．

［2］　1 辺の長さが 1 であるような正四面体の頂点を A，B，C，D とする．辺 AB を $(1-t):t$ に内分する点を E，辺 AC を $t:(1-t)$ に内分する点を F とする．このとき，次の問いに答えよ．

⑴　$\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{DE}}$，$\vec{f}=\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ とするとき，$\vec{e}$，$\vec{f}$ の大きさおよび $\vec{e}\cdot\vec{f}$ を t で表せ．

⑵　$\angle\mathrm{EDF}=\theta$ とする．$0<t<1$ のとき，$\cos\theta$ の取り得る値の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　原点Oを中心とする半径 r の球面上に点A，B，Cがあり $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{COA}=90°$，$\angle\mathrm{BOC}=\theta$ $(0°<\theta\leqq 90°)$ である．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\cos\theta=k$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　平面ABC上の点Nについて，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\vec{n}$ を $\vec{n}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ で表すとき，$s+t+u=1$ となることを示せ．

(2)　(1)のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ の大きさが最小となるような s，t，u を k を用いて示せ．

(3)　点O，A，B，Cを頂点とする三角錐の体積 V を k と r を用いて示せ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］ 1辺の長さが2の正六角形ABCDEFに内接する円の中心をOとし，その円周上の点をPとする．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{x}$ とするとき，内接円のベクトル方程式を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{x}$ で表せ．

(2) 線分BCの中点をQとする．$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を満たす k の値をすべて求めよ．ただし，$k\neq1$ とする．

［2］ 空間の点P(0，0，1)を中心とする半径1の球面 S 上の点N(0，0，2)を考える．

(1) 点Nを通り，ベクトル $(a，b，1)$ に平行な直線を l とするとき，直線 l が球面 S と交わるN以外の点Qの座標，および直線 l と xy 平面との交点Rの座標を求めよ．

(2) 球面 S と平面 $y=\dfrac{1}{2}$ の交わりを C とする．点Qが C 上を動くとき，点Rの描く図形の方程式を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　数列

1　[1]　初項2，初項から第 n 項までの和が15である等差数列 $\{a_k\}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　数列 $\{a_k\}$ の第 k 項を n と k を用いて表せ．

(2)　数列 $\{a_k\}$ の初項から第 n 項までの項の中で負の数になるものの個数が6個であるとき，n の値を求めよ．

[2](1)　10^n の正の約数（1と 10^n を含める）の中で 5^k で割り切れて 5^{k+1} で割り切れないものの総和を A_k とする．A_k を求めよ．ただし，n は正の整数，k は $0 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする．

(2)　(1)の A_k を利用して，10^n の正の約数の総和 B_n を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　$\{m_n\}$ を公比 r の等比数列とする．2 次関数 $y=x^2$ のグラフを C とし，C 上に点 P_1 をとる．各自然数 n に対し，点 P_n から点 P_{n+1} を順次，次のように定める．点 P_n を通り傾き m_n の直線を l_n とし，この直線と C とのもう一つの交点を P_{n+1} とする．ただし，C と l_n が接する場合は $\mathrm{P}_{n+1}=\mathrm{P}_n$ とする．点 P_n の x 座標を a_n とする．

(1)　a_{n+1} を a_n と m_n で表せ．

(2)　$(-1)^n a_n=b_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を a_1，m_1，r，k で表せ．

(3)　$a_1=\dfrac{m_1}{1+r}$ とする．このとき，ある 2 次関数 $y=bx^2$ があって，すべての自然数 n に対し直線 l_n がこの 2 次関数のグラフに接するとき，b を r で表せ．ただし，$m_1\neq0$，$r\neq-1$，0 とする．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　曲線　$3x^2-y^2=-1$　……①　について次の問いに答えよ．

(1)　点 $(a,\ b)$ が①のグラフ上の点とすれば，$(2a+b,\ 3a+2b)$ もまた①のグラフ上の点であることを示せ．

(2)　n を正の整数とする．このとき $\sqrt{3}a+b=(2+\sqrt{3})^n$ を満たす整数 a，b をとれば，点 $(a,\ b)$ は①のグラフ上の点であることを示せ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　場合の数・確率

1　A，B，C，D がそれぞれ表に a，b，c，d と書かれたカードを持っている（カードの裏には何も書かれていない）．４人全員が自分のカードを裏返して場に出し，どれがどのカードかわからないようシャッフルした後１人１枚ずつ引くとする．次の問いに答えよ．

(1)　A が a のカードを引く確率を求めよ．

(2)　A が b のカードを引き，残りの B，C，D のうちの誰かがもともと自分自身の持っていたカードを引く確率を求めよ．

(3)　自分自身の持っていたカードを誰も引かない確率を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　[1]　袋 A の中に赤球 2 個，袋 B の中に白球 2 個が入っている．「A から無作為に 1 個の球を取り出して B に入れ，その後 B の中から無作為に 1 個の球を取り出して A に戻す」という操作を繰り返す．いま n 回操作した後に，A の中に赤球が 0，1，2 個入っているという事象を，それぞれ $A_n(0)$，$A_n(1)$，$A_n(2)$ で表す．このとき，事象 $A_n(0)$，$A_n(1)$，$A_n(2)$ のそれぞれが起こる確率を求めよ．

[2]　a 個の白球と b 個の赤球が入っているつぼが n 個ある．第 1 のつぼから 1 個の球を取り出して第 2 のつぼに入れ，次に第 2 のつぼから 1 個の球を取り出して第 3 のつぼに入れる．この操作を続けて最後に第 n のつぼから取り出された球が赤球である確率を求めよ．ただし，つぼから各球は等しい確率で取り出されるものとする．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　1つのサイコロを何回も振る試行において，初めて6の目が出たら，6の目が出る限り振り続け，6の目が出なくなったとき振ることをやめるものとする．ただし，振る回数は全体で n を越えないものとする．

(1)　上の試行において，6の目が続いてちょうど r 回 $(1 \leqq r \leqq n)$ 出る確率を求めよ．

(2)　上の試行において，6の目が続いてちょうど r 回 $(1 \leqq r \leqq n)$ 出たら 6^{r-1} 円もらう約束をした人が受け取る金額の期待値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　整数問題

1 次の問いに答えよ．

(1) 3 桁の自然数 $N=100a+10b+c$（a，b，c は整数．$1\leqq a\leqq 9$，$0\leqq b\leqq 9$，$0\leqq c\leqq 9$）がある．2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは座標が整数である異なる 2 点で x 軸と交わり，グラフと x 軸とで囲まれる部分の面積が 4 となる．このとき N を求めよ．

(2) 5 を加えると 7 で割り切れ，7 を加えると 11 で割り切れる 3 桁の自然数のうち最小のものを求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　整数を係数とする3次の等式

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

について，次の(1)，(2)を証明せよ．

(1)　有理数 α が方程式 $f(x)=0$ の1つの解ならば，α は整数である．

(2)　ある自然数 k (>1) に対して，k 個の整数 $f(1)$，$f(2)$，……，$f(k)$ のどれもが k で割り切れなければ，方程式 $f(x)=0$ は有理数の解をもたない．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　正の整数 a に対し，a の正の約数全体の和を $S(a)$ で表す．たとえば，$a=15$ ならば 15 の正の約数は 1，3，5，15 なので，$S(15)=24$ となる．次の問いに答えよ．

(1)　a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a=pq$ と表されるとする．このとき $S(a)\geqq(p+1)q$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのは，$q=1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ．

(2)　$a=2^2r$，$b=2^4s$（r，s は正の奇数）の形をした偶数 a，b を考える．$S(a)=2b$，$S(b)=2a$ を満たす a，b を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　総合問題(1)

1　以下の設問に答えよ．

(1)　正の実数 a，b に対して次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqq \frac{4}{a+b}$$

(2)　正の実数 x_i $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ に対して次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} \geqq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　座標空間内の三角柱

$0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 2,\ x \geqq y,\ 0 \leqq z \leqq 2$

を考え，その xy 平面内の面を S, zx 平面内の面を T とする．点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を S 内に，点 $\mathrm{B}(c,\ 0,\ d)$ を T 内にとり，また $\mathrm{C}(2,\ 2,\ 2)$ とする．ただし，点 A，B は原点 O とは異なるとする．

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に直交する単位ベクトルを求め．その単位ベクトルとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積の絶対値を求めよ．

(2)　四面体 OABC の体積を求めよ．ただし，点 O, A, B, C は同一平面上にないとする．

(3)　点 A が S 内を，点 B が T 内を動くとする．このときの，四面体 OABC の体積の最大値，および最大値を与える点 A，B の位置をすべて求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　サイコロを振って 1 または 2 の目が出れば 5 点，3 または 4 の目が出れば 3 点，5 または 6 の目が出れば 0 点を獲得するとする．サイコロを 10 回振り，獲得する得点の合計が n 点となる確率を $p(n)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$p(13)$ の値を求めよ．

(2)　$p(7)=0$ となることを証明せよ．

(3)　$p(20)$ の値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　総合問題(2)

1　長さ 1 の線分 AB を直径とする円を底面とし，高さが $\frac{\sqrt{3}}{2}$ の直円錐を考える．この直円錐の側面上で 2 点 A，B を結ぶ最短の道を l とする．直円錐の頂点を C，底面の中心を O とする．以下の問いに答えよ．

(1)　l の長さを求めよ．

(2)　l 上の点 P に対して，線分 CP の延長と弧 AB の交点を Q とする．$\angle AOQ=\theta$ として CP^2 を $\sin\theta$ で表せ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(3)　P から線分 OQ に下ろした垂線を PR とし，A から線分 OQ に下ろした垂線を AS とする．$0^\circ < \theta \leqq 90^\circ$ の範囲で $\frac{OS^2}{OR^2}$ の最大値を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　座標平面上で，不等式

$$2||x|-4|+||y|-5|\leqq 3$$

が表す領域を D とする．

(1)　領域 D を図示せよ．

(2)　領域 D 内の点 $(x,\ y)$ で，x が正の整数であり y が整数であって，$\log_x|y|$ が有理数となる点をすべて求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　実数 p，自然数 q に対して，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ をそれぞれ

$$a_1=-1,\quad a_{n+1}=pa_n+p$$

$$b_1=q,\quad b_{n+1}=b_n+(-1)^{n-1}q$$

と定める．

(1)　$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ をはじめから順に区画に分け，第 m 区画に属する項の個数が b_m となるようにする．m を正の偶数とするとき第 m 区画に属する項の和 T_m を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　四角形ABCDに半径rの円Oが内接している．四角形ABCDの面積をSとするとき，次の問いに答えよ．

(1)　Sをrおよび角A，B，C，Dを用いて表せ．

(2)　AD∥BCのときSの最小値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

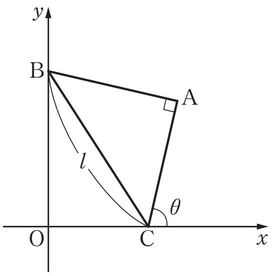
2　座標平面の x 軸上に点 A(15, 0) があり，y 軸上の $y>0$ の部分に点 B がある．原点 O と直線 AB との距離，および線分 OB の長さはともに整数である．点 B の座標を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　辺 BC を斜辺とする直角二等辺三角形 ABC が図の位置にある．BC$=l$ として次の問いに答えよ．

(1)　頂点 A の座標 $(x,\ y)$ を l と θ を用いて表せ．

(2)　B，C がそれぞれ x 軸，y 軸の正の部分を動くとき，点 A の動く範囲を求め，かつ図示せよ．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[2] 円 C_1：$x^2+y^2=25$ と円 C_2：$(x-10)^2+(y-5)^2=50$ の 2 つの交点と原点を通る円を C_3 とする．次の問いに答えよ．

(1) 円 C_3 の中心と半径を求めよ．

(2) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が円 C_3 上を動くとき，$2y-x$ の最大値を求めよ．

(3) 円 C_1 と円 C_2 の 2 つの交点を通る円の中心の軌跡を求めよ．

(4) 円 C_1 と円 C_2 の 2 つの交点を通る円を C とする．点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ が円 C 上を動くとき，$2y-x$ の最大値が最小となる円 C の中心と半径を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　係数 a, b, c, d が実数である x の 3 次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ が極大値と極小値をとり，かつこの関数の表すグラフの極大値，極小値を与える点が原点に関して対称ならば，このグラフは原点に関して対称であることを証明せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　$f(x)=|x(x^2-1)|-x^2$ とする．

(1)　$y=f(x)$ で表される座標平面上の曲線を C とする．C と x 軸との共有点のうち x 座標が最大である点を求めよ．

(2)　関数 $f(x)$ の極大値と極小値を求めよ．

(3)　k を実数とする．2つの曲線 $y=|x(x^2-1)|$ と $y=x^2+k$ の共有点の個数が最大となるとき k のとり得る値の範囲を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　a を正の実数とし，点 $\mathrm{A}\left(0,\ a+\dfrac{1}{2a}\right)$ と曲線 $C:y=ax^2\ (x\geqq 0)$ を考える．曲線 C 上の点で，点Aとの距離が最小となるものをPとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点Pの座標と線分APの長さを求めよ．

(2)　曲線 C と y 軸，および線分APで囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ．

(3)　$a>0$ のとき，面積 $S(a)$ の最小値を求めよ．また，そのときの a の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 放物線 $y=x^2$ 上の点 A$(a,\ a^2)$ における接線 l と，点 B$(b,\ b^2)$ における接線 m との交点を C とおく．ただし，$a<b$ とする．

(1) 2 直線 l，m と放物線 $y=x^2$ とで囲まれる部分の面積 S を a と b で表せ．

(2) 点 C が放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-2$ の上を動くときの面積 S の最小値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　四面体 OABC において，$\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = \theta\,(0^\circ < \theta < 90^\circ)$，$OA = OB = 2$，$OC = 1$ とする．点 M，N をそれぞれ辺 OA，AB の中点とし，半直線 CM 上に点 P，半直線 ON 上に Q をとる．いま，PQ が最小となるとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\vec{a} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$，$\vec{b} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$，$\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とするとき，$\overrightarrow{PQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(2)　$\theta = 60^\circ$ のとき，P，Q がそれぞれ線分 CM，ON をどのような比に分けるか答えよ．また，そのときの PQ の長さを求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 中心が $(0,\ 0,\ 1)$，半径が 1 の球面が，yz 平面に平行で点 $(a,\ 0,\ 0)$ $(0<a<1)$ を通る平面と交わってできる図形を C とする．

(1) C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ y_1,\ z_1)$ と点 $\mathrm{Q}(0,\ 0,\ 2)$ を通る直線 PQ が xy 平面と交わる点を $\mathrm{R}(x,\ y,\ 0)$ とする．y_1 と z_1 をそれぞれ a，x，y を使って表せ．

(2) 点 P が C 上を動くとき，点 R の軌跡を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　xy 平面上の曲線 $y=x^2$ を C とする．点 $P_0(2,\ 4)$ における C の接線が直線 $y=2$ と交わる点を $Q_1(a_1,\ 2)$ とする．次に，点 $P_1(a_1,\ a_1{}^2)$ における C の接線が直線 $y=a_1$ と交わる点を $Q_2(a_2,\ a_1)$ とする．以下同様に，点 $(a_n,\ a_n{}^2)$ を P_n とし，P_n における C の接線が $y=a_n$ と交わる点を $Q_{n+1}(a_{n+1},\ a_n)$ として，P_2，Q_3，P_3，Q_4，…… を定める．次の問いに答えよ．

(1)　a_1 を求めよ．

(2)　a_n を n の式で表せ．

(3)　線分 P_nQ_{n+1}，線分 $P_{n+1}Q_{n+1}$，および C で囲まれる部分の面積を n の式で表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 n は 2 以上の整数であり，$\frac{1}{2}<a_j<1$（$j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$）とする．このとき，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)$$

が成り立つことを示せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　各面に１から８までの数字が１つずつ書かれた正八面体のさいころを繰り返し投げ，n 回目までに出た数字の合計を $X(n)$ とする．$X(n)$ が３で割り切れる確率を a_n，$X(n)$ を３で割ったとき１余る確率を b_n，$X(n)$ を３で割ったとき２余る確率を c_n とする．次の問いに答えよ．ただし，１から８までの数字の出る確率はどれも同じとする．

(1)　a_1，b_1，c_1 を求めよ．

(2)　a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n を用いて表せ．

(3)　a_n，b_n，c_n を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　袋の中に赤球が a 個，白球が b 個入っている．この袋から無作為に1個の球を取り出し，その色を記録して袋に戻す．この試行をくり返し，同じ色の球が2回続けて出るか，または試行の回数が $2N$ に達したとき，試行を止める．ただし，N は2以上の一定の自然数とする．この試行がちょうど k 回で終わる確率を P_k $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2N)$ とし，$p=\dfrac{a}{a+b}$，$q=\dfrac{b}{a+b}$，$r=pq$ とおく．

(1)　P_{2l}，P_{2l+1} $(l=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N-1)$ および P_{2N} を r を用いて表せ．

(2)　試行の回数の期待値 E は，定数A，Bを用いて $E=\mathrm{A}+\mathrm{B}(r+r^2+\cdots\cdots+r^{N-1})$ と表されることを示し，A，Bを求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　[1]　a を１以上の整数とするとき，次の各命題の真偽の判定とその根拠となる証明をせよ．

(1)　ある a に対して，$\sqrt{a}$ と $\sqrt{a+1}$ はともに有理数である．

(2)　a が自然数ならば $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$ は無理数である．

[2]　$7l=4m+3$，$lm=139-28n^2+l+m$ を満たす整数の組 $(l,\ m,\ n)$ は何組あるか求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　直角三角形 ABC は，$\angle C$ が直角で，各辺の長さは整数であるとする．辺 BC の長さが 3 以上の素数 p であるとき，以下の問いに答えよ．

(1)　辺 AB，CA の長さを p を用いて表せ．

(2)　$\tan\angle A$ と $\tan\angle B$ は，いずれも整数にならないことを示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　空間ベクトル　$\overrightarrow{OP}=(2,\ 1,\ 2)$，$\overrightarrow{OQ}=(2,\ 3,\ 6)$，$\overrightarrow{OR}=(3,\ 6,\ 2)$　がある．このとき次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ の両方に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ．

(2)　四面体 OPQR の体積 V を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 袋の中に 0 から 9 までの数字を 1 つずつ書いたカードが 10 枚入っている．袋からカード 1 枚を無作為に取り出して数字を確認したのち，袋にもどす試行を考える．

(1) この試行を 2 回繰り返すとする．確認した数字を順に X_1，X_2 とおくとき，等式 $X_1+X_2=X_1X_2$ が成り立つ確率を求めよ．

(2) この試行を 3 回繰り返すとする．確認した数字を順に X_1，X_2，X_3 とおくとき，等式 $X_1+X_2+X_3=X_1X_2X_3$ が成り立つ確率を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 座標平面上の4点 $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(0,\ 1)$ からなる集合を L, 不等式 $ax+by-c \geqq 0$ を満たす実数 x, y を座標としてもつ点 $(x,\ y)$ からなる集合を D とする．このとき，L と D の共通部分 $L \cap D$ について次の問いに答えよ．

(1) 実数 a, b, c をどのように選んでも，$L \cap D = \{(0,\ 0),\ (1,\ 1)\}$ にならないことを示せ．

(2) $L \cap D = \{(1,\ 1)\}$ ならば，$\dfrac{c}{\sqrt{2}} \leqq \sqrt{a^2+b^2} < \sqrt{2}\,c$ であることを示せ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　数列 $\{a_n\}$ は次のように定められている．初項 $a_1=0$ であり，すべての自然数 n に対して

$$a_{n+1}=-a_n+\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$$ が成り立つ．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　a_3，a_4 を求めよ．

(2)　α を定数として $b_n=(-1)^n(a_n+\alpha)$ とおく．$\{b_n\}$ が等差数列になるためには α をどのように定めればよいか．α の値を求めよ．

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を n を用いて表せ．

(4)　数列 $\{a_n\}$ の第 $2n$ 項までの 2 乗の和　$S_{2n}={a_1}^2+{a_2}^2+\cdots\cdots+{a_{2n}}^2$　を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

テキスト解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　証明，論証

| 1 | ［1］　$p=\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}$，$q=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ とする．$x>y>z$ のとき p と q の大小を比べよ．

$$p-q=\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)$$
$$=\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}=\frac{yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)}{xyz}$$
$$=\frac{1}{xyz}\{(y-z)x^2-(y^2-z^2)x+yz(y-z)\}$$
$$=-\frac{1}{xyz}(x-y)(y-z)(z-x)$$

$x>y>z$ より　$x-y>0$，$y-z>0$，$z-x<0$

よって，$p-q$ の正負は xyz の正負と一致する．

$x>y>z$ より

$\boldsymbol{xyz>0}$　つまり　x，y，z がすべて正　または　x が正，y，z が負**のとき**

$p-q>0$　つまり　$\boldsymbol{p>q}$

$\boldsymbol{xyz<0}$　つまり　x，y，z がすべて負　または　x，y が正，z が負**のとき**

$p-q<0$　つまり　$\boldsymbol{p<q}$

| 1 | ［2］　α，β は $0<\alpha<\beta$ を満たす定数とする．$x>0$，$xy\geqq 1$ を満たすとき，$\alpha(x-y)+\beta(x+y)$ を最小にする x，y の値およびその最小値を α，β で表せ．

$\alpha(x-y)+\beta(x+y)=(\beta+\alpha)x+(\beta-\alpha)y$　……①

$x>0$，$xy\geqq 1>0$ より　$y>0$

$0<\alpha<\beta$ より　$\beta+\alpha>0$，$\beta-\alpha>0$

よって　①$\geqq 2\sqrt{(\beta+\alpha)x\cdot(\beta-\alpha)y}=2\sqrt{(\beta^2-\alpha^2)xy}$　……②

等号成立は　$(\beta+\alpha)x=(\beta-\alpha)y$　つまり　$y=\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}x$　……③　のとき

ここで，$xy\geqq 1$ より　②$\geqq 2\sqrt{(\beta^2-\alpha^2)\cdot 1}=2\sqrt{\beta^2-\alpha^2}$

等号成立は　$xy=1$　……④　のとき

したがって　$\alpha(x-y)+\beta(x+y)\geqq 2\sqrt{\beta^2-\alpha^2}$

等号成立は③かつ④のとき

ゆえに　$\alpha(x-y)+\beta(x+y)$ は

$\boldsymbol{x=\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}}}$，$\boldsymbol{y=\sqrt{\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}}}$ **のとき**最小値　$\boldsymbol{2\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}$　をとる．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1) $x \geqq y > 0$ のとき，不等式 $\dfrac{1+x}{x} \leqq \dfrac{1+y}{y}$ が成り立つことを示せ．

(2) 不等式 $\dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|} \geqq \dfrac{|x+y|}{1+|x+y|}$ が成り立つことを示せ．

(1) $x \geqq y > 0$ より $\dfrac{1+y}{y} - \dfrac{1+x}{x} = \dfrac{x(1+y) - y(1+x)}{xy} = \dfrac{x-y}{xy} \geqq 0$

等号成立は $x = y$ のとき．

ゆえに $\dfrac{1+x}{x} \leqq \dfrac{1+y}{y}$

(2) (1)より $x \geqq y > 0$ のとき $0 < \dfrac{1+x}{x} \leqq \dfrac{1+y}{y}$ が成り立つ．

よって $x \geqq y \geqq 0$ のとき $\dfrac{x}{1+x} \geqq \dfrac{y}{1+y}$ が成り立つ．

$|x| + |y| \geqq |x+y| \geqq 0$ であることより $\dfrac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} \geqq \dfrac{|x+y|}{1+|x+y|}$ である．

ここで $\dfrac{|x|}{1+|x|+|y|} \leqq \dfrac{|x|}{1+|x|}$ 等号成立は $|x| = 0$ または $|y| = 0$ のとき

$\dfrac{|y|}{1+|x|+|y|} \leqq \dfrac{|y|}{1+|y|}$ 等号成立は $|x| = 0$ または $|y| = 0$ のとき

であることより

$$\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leqq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$$

等号成立は $x = 0$ または $y = 0$ のとき　ゆえに $\dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|} \geqq \dfrac{|x+y|}{1+|x+y|}$

3 次の各命題が真であることを証明せよ．

(1) $\sqrt{2}$ は無理数である．

(2) a を整数とする．2 次方程式 $x^2 + 5x + a = 0$ が有理数解をもつならば，a は偶数である．

(1) $1 < \sqrt{2} < 2$ より $\sqrt{2}$ は整数ではない．

$\sqrt{2}$ が整数でない有理数であると仮定すると $\sqrt{2} = \dfrac{n}{m}$ ……① （m，n は互いに素の自然数．$m \neq 1$）と表せる．

①は $\sqrt{2}\,m = n$ つまり $2m^2 = n^2$ ……②

②の左辺は 2 の倍数より，右辺すなわち n^2 は 2 の倍数．

よって，整数 n は 2 の倍数である．したがって $n = 2k$ （k は自然数） とおける．

このとき，②より $2m^2 = (2k)^2$　$m^2 = 2k^2$　これより，同様に m は 2 の倍数である．

よって，m と n が互いに素であることに矛盾する．ゆえに $\sqrt{2}$ は無理数である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$x^2+5x+a=0$ が有理数解 $\dfrac{n}{m}$ をもつとする　(m，n は互いに素の整数)．

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2+5\left(\frac{n}{m}\right)+a=0$$

$$n^2+5mn+am^2=0$$

$$n(n+5m)=-am^2$$

m と n は互いに素より，$n+5m$ は m の倍数である．

よって　$n+5m=km$　(k は整数)　とおける．

$m\neq 0$ より　$\dfrac{n}{m}+5=k$　　つまり　$\dfrac{n}{m}=k-5$

よって，解 $\dfrac{n}{m}$ は整数である．これを α とする．

$$\alpha^2+5\alpha+a=0 \qquad \text{つまり} \quad a=-\alpha(\alpha+5)$$

α と $\alpha+5$ は偶奇を異にする．よって，その積，すなわち a は偶数である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　図形と方程式

1　(1)　点 $(a,\ b)$ に関して点 $(p,\ q)$ と対称な点の座標を求めよ．

(2)　3 次関数 $y=x^3+Ax^2+Bx+C$ のグラフはある点に関して点対称である．その点の座標を求めよ．

(1)　求める点を $(X,\ Y)$ とおくと

$$\frac{X+p}{2}=a,\ \frac{Y+q}{2}=b \text{ より }\quad X=2a-p,\ Y=2b-q$$

ゆえに　$\boldsymbol{(2a-p,\ 2b-q)}$

(2)　$(p,\ q)$ が $y=x^3+Ax^2+Bx+C$ 上にあるとき　$q=p^3+Ap^2+Bp+C$　……①

求める点を $(a,\ b)$ とし，(1)で求めた点 $(2a-p,\ 2b-q)$ が $y=x^3+Ax^2+Bx+C$ のグラフ上にあるとする．

$$2b-q=(2a-p)^3+A(2a-p)^2+B(2a-p)+C$$
$$=8a^3-12a^2p+6ap^2-p^3+4a^2A-4aAp+Ap^2+2aB-Bp+C\quad \text{より}$$
$$q=p^3-(A+6a)p^2+(12a^2+4aA+B)p+2b-8a^3-4a^2A-2aB-C\quad ……②$$

①，②が任意の p で成立するのは

$$A=-(A+6a)\quad ,\quad B=12a^2+4aA+B\quad ,\quad C=2b-8a^3-4a^2A-2aB-C$$

つまり　$a=-\dfrac{A}{3}$（このとき $B=12a^2+4aA+B$ は成立），$b=\dfrac{2}{27}A^3-\dfrac{1}{3}AB+C$　のとき．

ゆえに，求める点は　$\boldsymbol{\left(-\dfrac{A}{3},\ \dfrac{2}{27}A^3-\dfrac{1}{3}AB+C\right)}$

2　2 定点 O(0, 0)，A(2, 1) と円 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ の周上を動く点 P がある．3 点 O，A，P が同一直線上にないとき，次の問いに答えよ．

(1)　△OAP の重心の軌跡を求めよ．

(2)　△OAP の面積の最大値を求めよ．

OA：$y=\dfrac{1}{2}x$ と円 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ の交点の y 座標は

$$(2y-1)^2+(y-1)^2=1\qquad 5y^2-6y+1=0\qquad (y-1)(5y-1)=0\quad \text{より}\quad y=1,\ \frac{1}{5}$$

よって，交点は　$(2,\ 1)$，$\left(\dfrac{2}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$　　題意より点 P はこの 2 点とは一致しない

(1)　$\mathrm{P}(s,\ t)$ とおくと　$(s-1)^2+(t-1)^2=1$　……①

△OAP の重心の座標を $(X,\ Y)$ とすると　$X=\dfrac{2+s}{3}$，$Y=\dfrac{1+t}{3}$

つまり　$s=3X-2,\ t=3Y-1$　……②

①，②より　$(3X-3)^2+(3Y-2)^2=1$　　$(X-1)^2+\left(Y-\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

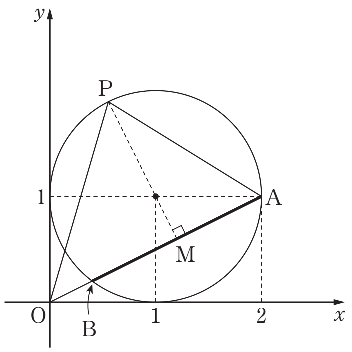
また　$(s,\ t) \neq (2,\ 1),\ \left(\frac{2}{5},\ \frac{1}{5}\right)$ より　$(X,\ Y) \neq \left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3}\right),\ \left(\frac{4}{5},\ \frac{2}{5}\right)$

よって，求める軌跡は　**円 $(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$　ただし，$\left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3}\right)$，$\left(\frac{4}{5},\ \frac{2}{5}\right)$ を除く**

(2)　$\mathrm{B}\left(\frac{2}{5},\ \frac{1}{5}\right)$ とすると，△OAP の面積が最大となるのは

弦 AB の垂直二等分線（円の中心 (1, 1) を通る）上に

P があるときである．



(1, 1) と OA：$x-2y=0$ の距離は　$\frac{|1-2|}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$　より

弦 AB の中点を M とすると　$\mathrm{PM}=1+\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}$

また　$\mathrm{OA}=\sqrt{5}$

ゆえに，求める面積の最大値は　$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　原点Oから出る半直線 l と x 軸の正の向きとのなす角を θ とする $\left(ただし，0<\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$.

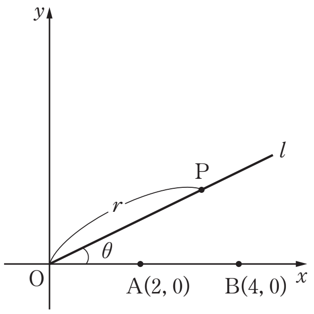
A(2, 0)，B(4, 0) とし，点Pは l 上の点とする．OP$=r$ $(\neq 0)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) cos∠OPA，cos∠OPB をそれぞれ r と θ を用いて表せ．

(2) 点Pが AP＋BP を最小にする l 上の点であるとき，∠OPA と ∠OPB の関係式を求めよ．また，このとき r を θ で表せ．

(3) 点Pが(2)の条件を満たすとき，点Pの描く軌跡を求め，図示せよ．

P$(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ とおける．



(1) $\mathrm{AP}^2=(r\cos\theta-2)^2+(r\sin\theta)^2=r^2-4r\cos\theta+4$

よって　$\cos\angle\mathrm{OPA}=\dfrac{\mathrm{OP}^2+\mathrm{AP}^2-\mathrm{OA}^2}{2\cdot\mathrm{OP}\cdot\mathrm{AP}}$

$$=\frac{r^2+r^2-4r\cos\theta+4-4}{2r\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{r-2\cos\theta}{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}}}$$

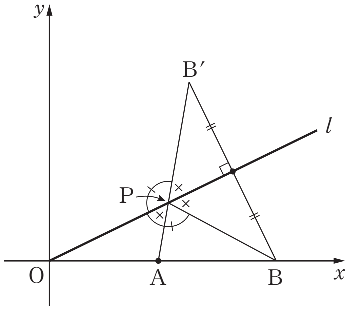
$\mathrm{BP}^2=(r\cos\theta-4)^2+(r\sin\theta)^2=r^2-8r\cos\theta+16$

よって　$\cos\angle\mathrm{OPB}=\dfrac{\mathrm{OP}^2+\mathrm{BP}^2-\mathrm{OB}^2}{2\cdot\mathrm{OP}\cdot\mathrm{BP}}=\boldsymbol{\dfrac{r-4\cos\theta}{\sqrt{r^2-8r\cos\theta+16}}}$

(2) Bの l に関する対称点を B′ とすると，AP＋BP が最小となる点Pは AB′ と l の交点である．

∠OPB＝∠OPB′，∠OPA＋∠OPB′＝180° より

∠OPA＋∠OPB＝180°　である．



したがって　cos∠OPB＝−cos∠OPA より

$$\frac{r-4\cos\theta}{\sqrt{r^2-8r\cos\theta+16}}=-\frac{r-2\cos\theta}{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}}$$

両辺を2乗して

$$\frac{r^2-8r\cos\theta+16\cos^2\theta}{r^2-8r\cos\theta+16}=\frac{r^2-4r\cos\theta+4\cos^2\theta}{r^2-4r\cos\theta+4}$$

$$1+\frac{16(\cos^2\theta-1)}{r^2-8r\cos\theta+16}=1+\frac{4(\cos^2\theta-1)}{r^2-4r\cos\theta+4}$$

$$4(r^2-4r\cos\theta+4)=r^2-8r\cos\theta+16$$

$$3r^2-8r\cos\theta=0$$

$r\neq 0$ より　$\boldsymbol{r=\frac{8}{3}\cos\theta}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　(2)のとき　$\mathrm{P}\left(\dfrac{8}{3}\cos^2\theta,\ \dfrac{8}{3}\sin\theta\cos\theta\right)$　これを $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とおくと

$X=\dfrac{4}{3}(1+\cos 2\theta)$ より　$\cos 2\theta=\dfrac{3}{4}X-1$

$Y=\dfrac{4}{3}\sin 2\theta$ より　$\sin 2\theta=\dfrac{3}{4}Y$

$\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta=1$ より　$\left(\dfrac{3}{4}X-1\right)^2+\left(\dfrac{3}{4}Y\right)^2=1$　　$\left(X-\dfrac{4}{3}\right)^2+Y^2=\dfrac{16}{9}$

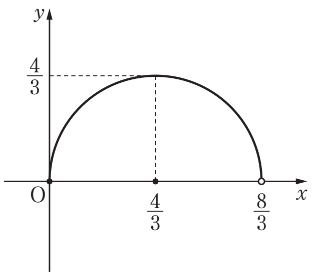
また，$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より　$0<2\theta\leqq\pi$

よって　$-1\leqq\cos 2\theta<1$　より　$0\leqq X<\dfrac{8}{3}$　　$0\leqq\sin 2\theta\leqq 1$　より　$0\leqq Y\leqq\dfrac{4}{3}$

ゆえに，求める軌跡は

円 $\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{16}{9}$　の $0\leqq x<\dfrac{8}{3}$，$0\leqq y\leqq\dfrac{4}{3}$ の部分.

図示すると右図実線部分.



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　微分法・積分法①

1　放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上の原点と異なる点 $\mathrm{A}\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$ における接線と x 軸との交点を P とし，直線 AP と x 軸の正の向きとのなす角を θ とする．x 軸を，点 P のまわりに正の向きに角 2θ だけ回転させて得られる直線を L とする．次の問いに答えよ．ただし，$a\neq\pm1$ とする．

(1)　直線 L を表す式を求めよ．

(2)　直線 L と放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ との交点の x 座標の値がいずれも $\frac{4a}{1-a^2}$ より小さくなるような a の取り得る値の範囲を求めよ．

(1)　$y=\frac{1}{2}x^2$ より　$y'=x$

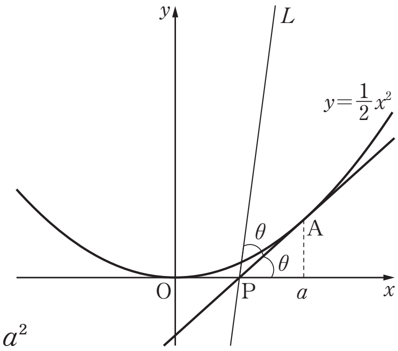
$\mathrm{A}\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$ における接線の方程式は　$y=a(x-a)+\frac{1}{2}a^2$　つまり　$y=ax-\frac{1}{2}a^2$

これと x 軸との交点は $a\neq0$ より　$\mathrm{P}\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$

また，$\tan\theta=a$ より，$a\neq\pm1$ のとき

$$\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2a}{1-a^2}$$

よって　L：$\boldsymbol{y=\frac{2a}{1-a^2}\left(x-\frac{a}{2}\right)}$



(2)　L と $y=\frac{1}{2}x^2$ の交点の x 座標は　$\frac{1}{2}x^2=\frac{2a}{1-a^2}x-\frac{a^2}{1-a^2}$

つまり　$x^2-\frac{4a}{1-a^2}x+\frac{2a^2}{1-a^2}=0$　の 2 解

$$f(x)=x^2-\frac{4a}{1-a^2}x+\frac{2a^2}{1-a^2}=\left(x-\frac{2a}{1-a^2}\right)^2-\frac{2a^2(1+a^2)}{(1-a^2)^2}$$　とおくと

$f(x)=0$ の 2 解がともに $\frac{4a}{1-a^2}$ より小さくなるのは

$f\left(\frac{4a}{1-a^2}\right)>0$　……①　かつ　軸$<\frac{4a}{1-a^2}$　……②　かつ　(頂点の y 座標)<0　……③

のとき

①より　$\left(\frac{2a}{1-a^2}\right)^2-\frac{2a^2(1+a^2)}{(1-a^2)^2}=\frac{2a^2}{1-a^2}>0$　　よって　$a^2-1<0$ より　$-1<a<1$

②より　$\frac{2a}{1-a^2}<\frac{4a}{1-a^2}$　　$\frac{2a}{1-a^2}>0$　　$a(a-1)(a+1)<0$

よって　$a<-1,\ 0<a<1$

③より　$-\frac{2a^2(1+a^2)}{(1-a^2)^2}<0$　これはすべての実数 a で成り立つ．　以上より　$\boldsymbol{0<a<1}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　関数　$f(x)=\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}(a+b)x^2+\frac{1}{2}(b+1)x$　を考える．

(1)　$a=0$ のとき，関数 $f(x)$ が $x>-1$ において常に増加するための b の条件を求めよ．

(2)　関数 $f(x)$ が $x>-1$ において常に増加するための a，b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ．

(1)　$a=0$ のとき　$f(x)=\frac{1}{2}bx^2+\frac{1}{2}(b+1)x$

$b=0$ のとき　$f(x)=\frac{1}{2}x$　よって，$f(x)$ はつねに増加．

$b<0$ のとき　グラフは上に凸の放物線．よって，$x>-1$ で常に増加することはなく不適．

$b>0$ のとき　グラフは下に凸の放物線．よって，(グラフの軸)$\leqq -1$ であればよい．

$-\frac{b+1}{2b}\leqq -1$　　$b+1\geqq 2b$　　$b\leqq 1$　　ゆえに　$0<b\leqq 1$

以上より　**$0\leqq b\leqq 1$**

(2)　$a=0$ のときは(1)より　$0\leqq b\leqq 1$

$a\neq 0$ のときは $x>-1$ で $f'(x)\geqq 0$ であればよい．

$$f'(x)=ax^2+(a+b)x+\frac{1}{2}(b+1)=a\left(x+\frac{a+b}{2a}\right)^2-\frac{a^2+b^2-2a}{4a}$$

$a<0$ のとき　$x>-1$ で常に $f'(x)>0$ ということはなく不適．

$a>0$ のとき　(グラフの軸)$\leqq -1$　のとき　つまり　$-\frac{a+b}{2a}\leqq -1$　より　$b\geqq a$ のとき

$f'(-1)\geqq 0$ であればよい．

よって　$a-(a+b)+\frac{1}{2}(b+1)\geqq 0$ より　$b\leqq 1$

$b<a$ のとき　(頂点の y 座標)$\geqq 0$ であればよい．

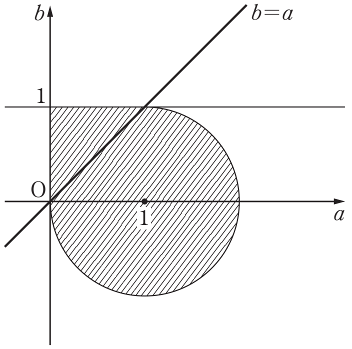
よって　$-\frac{a^2+b^2-2a}{4a}\geqq 0$　　$a^2+b^2-2a\leqq 0$　　$(a-1)^2+b^2\leqq 1$

以上より　**$a=0$ のとき　$0\leqq b\leqq 1$**

$a>0$ のとき　($b\geqq a$　かつ　$b\leqq 1$)

または　($b<a$　かつ　$(a-1)^2+b^2\leqq 1$)

範囲を図示すると右図斜線部分（境界含む）．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　2つの正方形の面積の和を $2a^2$，周の和を $8k$ とする．このとき次の問いに答えよ．

(1)　それぞれの正方形を1面とする2つの立方体の体積の和 V を a と k を用いて表せ．

(2)　a を正の定数とするとき，それぞれの正方形が実際に作られるための k の範囲を求めよ．

(3)　(2)の条件下で k を動かしたとき，V の最小値を求めよ．

(1)　2つの正方形の1辺の長さを x，y とすると

$x^2+y^2=2a^2$　……①　　$4x+4y=8k$　……②

①より　$(x+y)^2-2xy=2a^2$　　これに②すなわち　$x+y=2k$　……③　を代入して

$4k^2-2xy=2a^2$　　よって　$xy=2k^2-a^2$　……④

ゆえに　$V=x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=(2k)^3-3(2k^2-a^2)\cdot 2k=\boldsymbol{-4k^3+6a^2k}$

(2)　③，④より x，y は t の2次方程式　$t^2-2kt+2k^2-a^2=0$　の2解である．

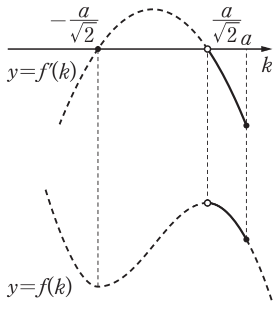
これが正の2解をもつときを考える．$f(t)=t^2-2kt+2k^2-a^2$　とおく．

$f(0)=2k^2-a^2>0$　　$k<-\dfrac{a}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{a}{\sqrt{2}}<k$

判別式 D について　$\dfrac{D}{4}=k^2-(2k^2-a^2)\geqq 0$　　$k^2\leqq a^2$　　$a>0$ より　$-a\leqq k\leqq a$

軸 >0　より　$k>0$

以上より　$\boldsymbol{\dfrac{a}{\sqrt{2}}<k\leqq a}$



(3)　$f(k)=-4k^3+6a^2k$ とおくと

$f'(k)=-12k^2+6a^2=-6(2k^2-a^2)$

よって，(2)の範囲において常に $f'(k)<0$ より

V の最小値は　$f(a)=\boldsymbol{2a^3}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第4講　微分法・積分法②

1　$0 \leqq x \leqq 1$ において $ax^2+b \geqq (x+1)^2$ が成り立つとき，定積分 $\int_0^1 (ax^2+b)dx$ を最小にする a，b と，そのときの定積分の値を求めよ.

$ax^2+b \geqq (x+1)^2$　より　$(a-1)x^2-2x+b-1 \geqq 0$

$f(x)=(a-1)x^2-2x+b-1$ とおき，$0 \leqq x \leqq 1$ における最小値が0以上であるときを考える.

$a=1$ のとき　$f(x)=-2x+b-1$　これは単調減少

よって　$0 \leqq x \leqq 1$ における最小値は $f(1)$

ゆえに　$f(1) \geqq 0$ より　$b-3 \geqq 0$　　つまり　$b \geqq 3$

$a \neq 1$ のとき　$f(x)=(a-1)\left(x-\dfrac{1}{a-1}\right)^2-\dfrac{1}{a-1}+b-1$　　軸：$x=\dfrac{1}{a-1}$

$a-1>0$　つまり　$a>1$ のとき　$\dfrac{1}{a-1}>0$

$\dfrac{1}{a-1} \leqq 1$　つまり　$a \geqq 2$ のとき

最小値 $f\left(\dfrac{1}{a-1}\right)=-\dfrac{1}{a-1}+b-1 \geqq 0$ より　$b \geqq \dfrac{1}{a-1}+1$

$1<a \leqq 2$ のとき　最小値 $f(1) \geqq 0$ であるから　$a-1-2+b-1 \geqq 0$ より　$b \geqq -a+4$

$a<1$ のとき　$\dfrac{1}{a-1}<0$　よって　最小値 $f(1) \geqq 0$ より　$b \geqq -a+4$（$a=1$ のときも成立）

以上より　$a \geqq 2$ のとき　$b \geqq \dfrac{1}{a-1}+1$　　$a \leqq 2$ のとき　$b \geqq -a+4$

$\int_0^1 (ax^2+b)dx=\left[\dfrac{a}{3}x^3+bx\right]_0^1=\dfrac{a}{3}+b=k$ とおくと

$a \geqq 2$ のとき　$k \geqq \dfrac{a}{3}+\dfrac{1}{a-1}+1=\dfrac{a-1}{3}+\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{4}{3} \geqq 2\sqrt{\dfrac{a-1}{3}\cdot\dfrac{1}{a-1}}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}+4}{3}$

（等号成立は　$\dfrac{a-1}{3}=\dfrac{1}{a-1}$　$(a-1)^2=3$ より　$a=1+\sqrt{3}$ のとき）

$a \leqq 2$ のとき　$k \geqq \dfrac{a}{3}-a+4=-\dfrac{2}{3}a+4 \geqq -\dfrac{2}{3}\cdot 2+4=\dfrac{8}{3}$　（等号成立は $a=2$ のとき）

$\dfrac{8}{3}>\dfrac{2\sqrt{2}+4}{3}$ より　求める最小値は　$\boldsymbol{a=1+\sqrt{3}}$，$\boldsymbol{b=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}}$ **のとき**　$\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}+4}{3}}$

2　実数 α と β は　$\alpha \leqq \beta$，$\alpha \neq 0$，$\beta>0$ を満たし　$f(x)=\dfrac{3}{\alpha\beta}(x-\alpha)(x-\beta)$　とする.

$\alpha=\beta^2$ のとき，$\int_0^\beta |f(x)|dx$ を最小にする β の値を求めよ.

$\alpha \leqq \beta$ より　$\beta^2 \leqq \beta$　$\beta(\beta-1) \leqq 0$　　よって　$\beta \leqq 1$　つまり　$0<\beta \leqq 1$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また，$\alpha=\beta^2>0$ より　$\alpha\beta>0$

よって，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であり，x 軸との交点の x 座標は α，β

$$\begin{aligned}\int_0^\beta |f(x)|dx&=\int_0^\alpha f(x)dx-\int_\alpha^\beta f(x)dx\\&=\int_0^\alpha f(x)dx-\left(\int_0^\beta f(x)dx-\int_0^\alpha f(x)dx\right)\\&=2\int_0^\alpha f(x)dx-\int_0^\beta f(x)dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^t f(x)dx&=\frac{3}{\alpha\beta}\int_0^t (x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{3}{\alpha\beta}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{\alpha+\beta}{2}x^2+\alpha\beta x\right]_0^t\\&=\frac{3}{\beta^3}\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{\beta^2+\beta}{2}t^2+\beta^3 t\right)=\left(\frac{t}{\beta}\right)^3-\frac{3}{2}\left(\frac{\beta+1}{\beta^2}\right)t^2+3t=F(t)\end{aligned}$$ とおくと

$$F(\alpha)=F(\beta^2)=\beta^3-\frac{3}{2}(\beta^3+\beta^2)+3\beta^2=-\frac{1}{2}\beta^3+\frac{3}{2}\beta^2$$

$$F(\beta)=1-\frac{3}{2}(\beta+1)+3\beta=\frac{3}{2}\beta-\frac{1}{2}$$

よって　$\displaystyle\int_0^\beta |f(x)|dx=-\beta^3+3\beta^2-\frac{3}{2}\beta+\frac{1}{2}$　　これを $g(\beta)$ とおく　$(0<\beta\leqq 1)$

$g'(\beta)=-3\beta^2+6\beta-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{3}{2}(2\beta^2-4\beta+1)$　　$\beta=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$ のとき　$g'(\beta)=0$

よって，$g(\beta)$ は　$\beta=\boldsymbol{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$　で最小となる．

> **3**　[1](1)　$(a,\ b)$ を平面上の点とする．2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が実数解をもち，それら 2 実数解の絶対値の和が 1 以下であるとき，点 $(a,\ b)$ が存在する範囲を求め，図示せよ．
>
> (2)　(1)で求めた範囲の面積を求めよ．

[1](1)　$x^2+ax+b=0$ の判別式を D とすると　$D=a^2-4b\geqq 0$ より　$b\leqq\dfrac{1}{4}a^2$

このときこの方程式の 2 解を α，β とすると，解と係数の関係より　$\alpha+\beta=-a$，$\alpha\beta=b$

$|\alpha|+|\beta|\leqq 1$ より　$(|\alpha|+|\beta|)^2\leqq 1$　　$\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2\leqq 1$　　$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|\leqq 1$

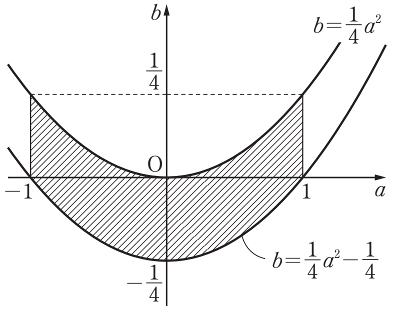
よって　$a^2-2b+2|b|\leqq 1$

ゆえに　**$b\geqq 0$ のとき**　$a^2-2b+2b\leqq 1$

つまり　$\boldsymbol{-1\leqq a\leqq 1}$

$b<0$ のとき　$a^2-2b-2b\leqq 1$

つまり　$\boldsymbol{b\geqq\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(a+1)(a-1)}$



よって，求める範囲は右図斜線部分（境界含む）

(2)　$2\displaystyle\int_0^1\left\{a^2-\left(a^2-\frac{1}{4}\right)\right\}da=\frac{1}{2}\int_0^1 da=\frac{1}{2}[a]_0^1=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [2](1) 円 $x^2+y^2=4$ と放物線 $C: y=x^2+2$ の両方に接する直線は 3 本ある．これらの接線の方程式を求めよ．

(2) (1)における 3 本の接線のうち，x 軸の正の部分と交わる接線を l_1，x 軸に平行な接線を l_2 とする．接線 l_1，l_2 および放物線 C とで囲まれる部分の面積を求めよ．

(1) $C: y=x^2+2$ より　$y'=2x$

$x=t$ における C の接線の方程式は　$y=2t(x-t)+t^2+2$　　つまり　$y=2tx-t^2+2$

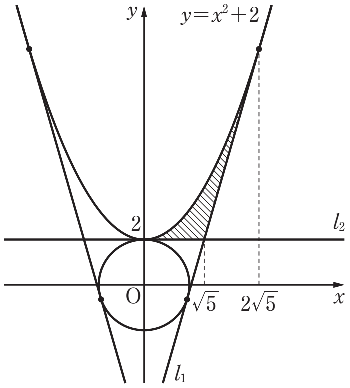
円 $x^2+y^2=4$ とこの接線　$2tx-y-t^2+2=0$ が接するとき

$$\frac{|-t^2+2|}{\sqrt{4t^2+1}}=2 \qquad |t^2-2|=2\sqrt{4t^2+1} \qquad t^4-4t^2+4=4(4t^2+1)$$

$$t^4-20t^2=0 \qquad t=0,\ \pm 2\sqrt{5}$$

よって，求める接線は

$$\boldsymbol{y=2,\ y=4\sqrt{5}\,x-18,\ y=-4\sqrt{5}\,x-18}$$



(2) $l_1: y=4\sqrt{5}\,x-18$ と $l_2: y=2$ の交点の x 座標は　$x=\sqrt{5}$

よって

$$\int_0^{\sqrt{5}}\{(x^2+2)-2\}dx+\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}}\{(x^2+2)-(4\sqrt{5}\,x-18)\}dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{5}}x^2dx+\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}}(x-2\sqrt{5}\,)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{5}}+\left[\frac{1}{3}(x-2\sqrt{5}\,)^3\right]_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}}$$

$$=\frac{5\sqrt{5}}{3}-\frac{1}{3}(-\sqrt{5}\,)^3=\frac{5\sqrt{5}}{3}+\frac{5\sqrt{5}}{3}=\boldsymbol{\frac{10\sqrt{5}}{3}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

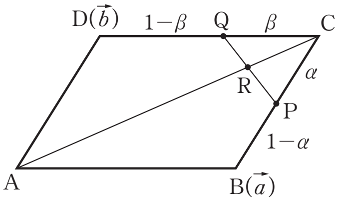
第５講　ベクトル

1 ［1］ $0<\alpha<1$，$0<\beta<1$ とする．平行四辺形 ABCD の辺 BC を $(1-\alpha):\alpha$ に内分する点を P とし，辺 CD を $\beta:(1-\beta)$ に内分する点を Q とする．また，線分 QP と平行四辺形の対角線 AC の交点を R とする．$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ として次の問いに答えよ．

(1) 長さの比 $\dfrac{QR}{RP}$ および $\dfrac{AR}{AC}$ を求めよ．

(2) $AB=2$，$AD=1$，$\angle DAB=60°$ とするとき，$\triangle AQR$ の面積を求めよ．

(1) $AR:RC=k:(1-k)$ とおくと $\overrightarrow{AR}=k\overrightarrow{AC}=k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ ……①



$PR:RQ=s:(1-s)$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AR}&=(1-s)\overrightarrow{AP}+s\overrightarrow{AQ}\\&=(1-s)\{\vec{a}+(1-\alpha)\vec{b}\}+s\{(1-\beta)\vec{a}+\vec{b}\}\\&=(1-\beta s)\vec{a}+(1-\alpha+\alpha s)\vec{b}\quad \cdots\cdots②\end{aligned}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は１次独立より①，②から $1-\beta s=k$，$1-\alpha+\alpha s=k$

よって $s=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$，$k=\dfrac{\alpha+\beta-\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

ゆえに $\dfrac{QR}{RP}=\dfrac{1-s}{s}=\boldsymbol{\dfrac{\beta}{\alpha}}$　　$\dfrac{AR}{AC}=\dfrac{k}{1}=\boldsymbol{\dfrac{\alpha+\beta-\alpha\beta}{\alpha+\beta}}$

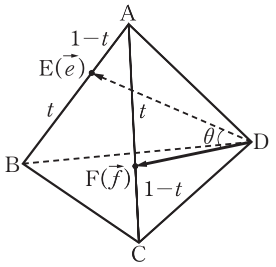
(2) $\triangle AQR=k\cdot\triangle AQC=k\cdot\beta\triangle ADC=k\cdot\beta\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot\sin 120°=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}\,\beta(\alpha+\beta-\alpha\beta)}{2(\alpha+\beta)}}$

1 ［2］ １辺の長さが１であるような正四面体の頂点を A，B，C，D とする．辺 AB を $(1-t):t$ に内分する点を E，辺 AC を $t:(1-t)$ に内分する点を F とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\vec{e}=\overrightarrow{DE}$，$\vec{f}=\overrightarrow{DF}$ とするとき，$\vec{e}$，$\vec{f}$ の大きさおよび $\vec{e}\cdot\vec{f}$ を t で表せ．

(2) $\angle EDF=\theta$ とする．$0<t<1$ のとき，$\cos\theta$ の取り得る値の範囲を求めよ．

$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{DB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ とすると



$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

(1) $\vec{e}=\overrightarrow{DE}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ より

$|\vec{e}|^2=t^2+2t(1-t)\times\dfrac{1}{2}+(1-t)^2=t^2-t+1$

$|\vec{e}|=\boldsymbol{\sqrt{t^2-t+1}}$

同様に $\vec{f}=\overrightarrow{DF}=(1-t)\vec{a}+t\vec{c}$ より $|\vec{f}|=\boldsymbol{\sqrt{t^2-t+1}}$

$$\begin{aligned}\vec{e}\cdot\vec{f}&=\{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\}\times\{(1-t)\vec{a}+t\vec{c}\}\\&=t(1-t)+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}(1-t)^2+\frac{1}{2}(1-t)t=\boldsymbol{\frac{-t^2+t+1}{2}}\end{aligned}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$\cos\theta=\dfrac{\vec{e}\cdot\vec{f}}{|\vec{e}||\vec{f}|}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-t^2+t+1}{t^2-t+1}=\dfrac{1}{2}\left(-1+\dfrac{2}{t^2-t+1}\right)$

$t^2-t+1=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$　　$0<t<1$　より　$\dfrac{3}{4}\leqq t^2-t+1<1$

よって　$2<\dfrac{2}{t^2-t+1}\leqq\dfrac{8}{3}$　より　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}<\cos\theta\leqq\dfrac{5}{6}}$

2　原点Oを中心とする半径 r の球面上に点A，B，Cがあり $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{COA}=90°$，$\angle\mathrm{BOC}=\theta$ $(0°<\theta\leqq 90°)$ である．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\cos\theta=k$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　平面ABC上の点Nについて，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\vec{n}$ を $\vec{n}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ で表すとき，$s+t+u=1$ となることを示せ．

(2)　(1)のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ の大きさが最小となるような s，t，u を k を用いて示せ．

(3)　点O，A，B，Cを頂点とする三角錐の体積 V を k と r を用いて示せ．

---

(1)　平面ABC上に点Nがあるとき　$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　とおける．

$\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\alpha(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\beta(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=(1-\alpha-\beta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

よって　$1-\alpha-\beta=s$，$\alpha=t$，$\beta=u$ とおくと　$\vec{n}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$，$s+t+u=1$

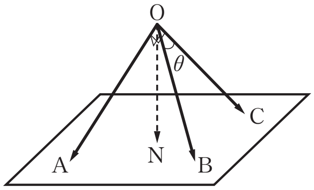
(2)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=r$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=r\times r\times\cos\theta=r^2k$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

ONが最小値となるのは　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}\perp$平面ABC

すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$　かつ　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ のとき

$\overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=(-s+t+ku)r^2=0$

$\overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=(-s+kt+u)r^2=0$



$r\neq0$ より　$s=t+ku$　かつ　$s=kt+u$

よって　$(k-1)t=(k-1)u$　　$0\leqq k<1$ より　$t=u$　……①

このとき　$s=(1+k)u$　……②

①，②を $s+t+u=1$ に代入して　$(3+k)u=1$　　ゆえに　$\boldsymbol{u=t=\dfrac{1}{3+k}}$，$\boldsymbol{s=\dfrac{1+k}{3+k}}$

(3)　$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{COA}=90°$　より　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp$平面OBC

$\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{r^2\times r^2-(r^2k)^2}=\dfrac{1}{2}r^2\sqrt{1-k^2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=r$

ゆえに　$V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}r^2\sqrt{1-k^2}\times r=\boldsymbol{\dfrac{r^3\sqrt{1-k^2}}{6}}$

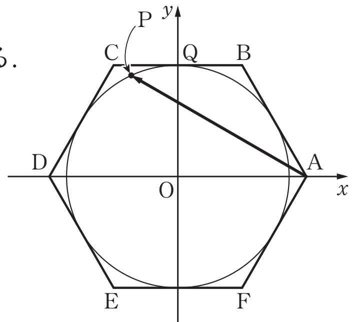
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　［1］　1辺の長さが2の正六角形ABCDEFに内接する円の中心をOとし，その円周上の点をPとする．次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AP}=\vec{x}$ とするとき，内接円のベクトル方程式を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{x}$ で表せ．

(2)　線分BCの中点をQとする．$\overrightarrow{AQ}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．

(3)　$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AQ}$ を満たす k の値をすべて求めよ．ただし，$k\neq1$ とする．



(1)　△OABは正三角形より，辺ABの中点をNとすると

内接円の半径の長さはONの長さであり，それは $\sqrt{3}$ である．

よって　$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{3}$ より　$|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AO}|=\sqrt{3}$

すなわち　$\overrightarrow{AO}=\vec{a}+\vec{b}$ より　$\boldsymbol{|\vec{x}-\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}}$

(2)　$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AO}=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}}$

(3)　$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AQ}$ より　$\vec{x}=\dfrac{3}{2}k\vec{a}+\dfrac{1}{2}k\vec{b}$　　これと(1)より

$\left|\left(\dfrac{3}{2}k-1\right)\vec{a}+\left(\dfrac{k}{2}-1\right)\vec{b}\right|=\sqrt{3}$　　ここで $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot2\cdot\cos120°=-2$　より

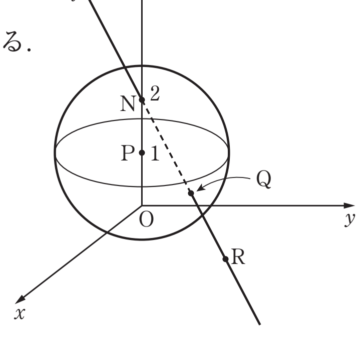
$4\left(\dfrac{3}{2}k-1\right)^2-4\left(\dfrac{3}{2}k-1\right)\left(\dfrac{k}{2}-1\right)+4\left(\dfrac{k}{2}-1\right)^2=3$

$(3k-2)^2-(3k-2)(k-2)+(k-2)^2=3$　　$7k^2-8k+1=0$　　$k\neq1$ より　$k=\boldsymbol{\dfrac{1}{7}}$

3　［2］　空間の点P(0, 0, 1)を中心とする半径1の球面 S 上の点N(0, 0, 2)を考える．

(1)　点Nを通り，ベクトル $(a,\ b,\ 1)$ に平行な直線を l とするとき，直線 l が球面 S と交わるN以外の点Qの座標，および直線 l と xy 平面との交点Rの座標を求めよ．

(2)　球面 S と平面 $y=\dfrac{1}{2}$ の交わりを C とする．点Qが C 上を動くとき，点Rの描く図形の方程式を求めよ．



(1)　l 上の点を $(x,\ y,\ z)$ とすると，l のベクトル方程式より

$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 2)+k(a,\ b,\ 1)=(ak,\ bk,\ k+2)$ とおける．

これと　$S:x^2+y^2+(z-1)^2=1$ より

$a^2k^2+b^2k^2+(k+1)^2=1$

$(a^2+b^2+1)k^2+2k=0$　　$k\neq0$ より　$k=\dfrac{-2}{a^2+b^2+1}$

よって　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{-2a}{a^2+b^2+1},\ \dfrac{-2b}{a^2+b^2+1},\ \dfrac{2(a^2+b^2)}{a^2+b^2+1}\right)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また，l と xy 平面つまり $z=0$ との交点は　$k+2=0$ より　$k=-2$ のとき

ゆえに　**R$(-2a,\ -2b,\ 0)$**

(2)　Q は S 上の点である．よって　Q が C 上を動くとき，その y 座標について

$\dfrac{-2b}{a^2+b^2+1}=\dfrac{1}{2}$ より　$a^2+b^2+4b+1=0$　……①

R$(x,\ y,\ 0)$ とおくと　$x=-2a$，$y=-2b$ より　$a=-\dfrac{x}{2}$，$b=-\dfrac{y}{2}$

これらを①に代入して　$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}-2y+1=0$

ゆえに点 R の描く図形の方程式は　$\boldsymbol{x^2+(y-4)^2=12,\ z=0}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　数列

1　[1]　初項 2，初項から第 n 項までの和が 15 である等差数列 $\{a_k\}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　数列 $\{a_k\}$ の第 k 項を n と k を用いて表せ．

(2)　数列 $\{a_k\}$ の初項から第 n 項までの項の中で負の数になるものの個数が 6 個であるとき，n の値を求めよ．

(1)　公差を d とすると　$\dfrac{n}{2}\{2+2+(n-1)d\}=15$

$n\{4+(n-1)d\}=30$　　$n(n-1)d=30-4n$　　よって　$d=\dfrac{30-4n}{n(n-1)}$

ゆえに　$\boldsymbol{a_k=2+(k-1)\cdot\dfrac{30-4n}{n(n-1)}}$

(2)　等差数列は単調増加または単調減少より，題意の 6 個の負の項は最初の 6 項，または最後の 6 項である．$a_1=2>0$ より最後の 6 項となる．

よって　$a_{n-6}\geqq 0$　……①　かつ　$a_{n-5}<0$　……②　であればよい．

①より　$2+\dfrac{(n-7)(30-4n)}{n(n-1)}\geqq 0$　　$n^2-28n+105\leqq 0$　　$14-\sqrt{91}\leqq n\leqq 14+\sqrt{91}$

②より　$2+\dfrac{(n-6)(30-4n)}{n(n-1)}<0$　　$n^2-26n+90>0$　　$n<13-\sqrt{79}$，$13+\sqrt{79}<n$

よって　$13+\sqrt{79}<n\leqq 14+\sqrt{91}$　　$\sqrt{79}=8.\cdots$，$\sqrt{91}=9.\cdots$ より

これを満たす自然数 n は　$\boldsymbol{n=22,\ 23}$ のみ

1　[2](1)　10^n の正の約数（1 と 10^n を含める）の中で 5^k で割り切れて 5^{k+1} で割り切れないものの総和を A_k とする．A_k を求めよ．ただし，n は正の整数，k は $0\leqq k\leqq n$ を満たす整数とする．

(2)　(1)の A_k を利用して，10^n の正の約数の総和 B_n を求めよ．

(1)　$10^n=(2\cdot 5)^n=2^n\cdot 5^n$ より

10^n の約数のうち題意を満たすものの和は　$2^0\cdot 5^k+2^1\cdot 5^k+2^2\cdot 5^k+\cdots+2^n\cdot 5^k$

ゆえに　$A_k=\dfrac{1\cdot(2^{n+1}-1)}{2-1}\cdot 5^k=\boldsymbol{(2^{n+1}-1)\cdot 5^k}$

(2)　$B_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}A_k=(2^{n+1}-1)\sum_{k=0}^{n}5^k=(2^{n+1}-1)\cdot\dfrac{1\cdot(5^{n+1}-1)}{5-1}=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}(2^{n+1}-1)(5^{n+1}-1)}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　$\{m_n\}$ を公比 r の等比数列とする．2 次関数 $y=x^2$ のグラフを C とし，C 上に点 P_1 をとる．各自然数 n に対し，点 P_n から点 P_{n+1} を順次，次のように定める．点 P_n を通り傾き m_n の直線を l_n とし，この直線と C とのもう一つの交点を P_{n+1} とする．ただし，C と l_n が接する場合は $\mathrm{P}_{n+1}=\mathrm{P}_n$ とする．点 P_n の x 座標を a_n とする．

(1)　a_{n+1} を a_n と m_n で表せ．

(2)　$(-1)^n a_n=b_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を a_1，m_1，r，k で表せ．

(3)　$a_1=\dfrac{m_1}{1+r}$ とする．このとき，ある 2 次関数 $y=bx^2$ があって，すべての自然数 n に対し直線 l_n がこの 2 次関数のグラフに接するとき，b を r で表せ．ただし，$m_1\neq 0$，$r\neq -1$，0 とする．

$m_n=m_1\cdot r^{n-1}$

(1)　$l_n：y=m_n(x-a_n)+{a_n}^2=m_nx-m_na_n+{a_n}^2$

これと C との交点の x 座標は

$$x^2-m_nx+a_n(m_n-a_n)=0 \qquad (x-a_n)(x+a_n-m_n)=0 \qquad x=a_n,\ -a_n+m_n$$

ゆえに　$\boldsymbol{a_{n+1}=-a_n+m_n}$

(2)　$(-1)^{n+1}a_{n+1}=(-1)^{n+1}\cdot(-1)\cdot a_n+(-1)^{n+1}\cdot m_1\cdot r^{n-1}=(-1)^n a_n+m_1(-r)^{n-1}$

よって　$(-1)^n a_n=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+m_1(-r)^{n-1}$，$b_1=-a_1$

したがって　$n\geqq 2$ のとき　$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}m_1(-r)^{k-1}$

ゆえに　$-r\neq 1$　つまり　**$r\neq -1$ のとき**　$\boldsymbol{b_n=-a_1+\dfrac{m_1\{1-(-r)^{n-1}\}}{1+r}}$

$r=-1$ のとき　$\boldsymbol{b_n=-a_1+m_1(n-1)}$

ともに，$n=1$ のときも成り立つ．

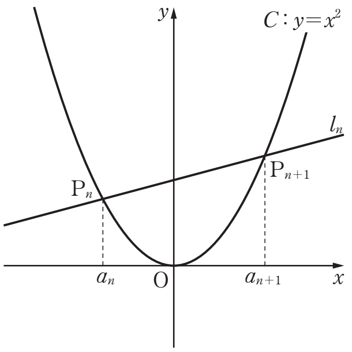
(3)　$r\neq -1$，$a_1=\dfrac{m_1}{1+r}$ より

$$a_n=(-1)^n\left[-\frac{m_1}{1+r}+\frac{m_1}{1+r}\{1-(-r)^{n-1}\}\right] \quad \text{つまり} \quad a_n=\frac{m_1r^{n-1}}{1+r}=\frac{m_n}{1+r}$$

このとき，$y=bx^2$ と l_n の交点の x 座標は　$bx^2-m_nx+m_na_n-{a_n}^2=0$ の 2 解．

この式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}D&={m_n}^2-4b(m_na_n-{a_n}^2)\\&=\{a_n(1+r)\}^2-4b{a_n}^2\{(1+r)-1\}\\&=\{(1+r)^2-4br\}{a_n}^2\end{aligned}$$



よって　$D=0$ となるのは　$a_n\neq 0$ より　$(1+r)^2-4br=0$

$r\neq 0$ より　$\boldsymbol{b=\dfrac{(1+r)^2}{4r}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　曲線　$3x^2-y^2=-1$　……①　について次の問いに答えよ.

(1)　点 $(a,\ b)$ が①のグラフ上の点とすれば, $(2a+b,\ 3a+2b)$ もまた①のグラフ上の点であることを示せ.

(2)　n を正の整数とする. このとき $\sqrt{3}\,a+b=(2+\sqrt{3})^n$ を満たす整数 a, b をとれば, 点 $(a,\ b)$ は①のグラフ上の点であることを示せ.

(1)　$(a,\ b)$ が①上の点のとき　$3a^2-b^2=-1$

$$3(2a+b)^2-(3a+2b)^2=3(4a^2+4ab+b^2)-(9a^2+12ab+4b^2)$$
$$=3a^2-b^2=-1$$

よって　$(2a+b,\ 3a+2b)$ も①上の点である.

(2)　$\sqrt{3}\,a+b=(2+\sqrt{3})^n$

$n=1$ のとき　$b+\sqrt{3}\,a=2+\sqrt{3}$　これを満たす整数 a, b は　$a=1$, $b=2$

$(1,\ 2)$ は①上の点より　$n=1$ のとき成り立つ.

$n=k$ のとき

$\sqrt{3}\,a_k+b_k=(2+\sqrt{3})^k$ を満たす整数 a_k, b_k をとれば $(a_k,\ b_k)$ は①上の点, すなわち $3{a_k}^2-{b_k}^2=-1$ を満たすと仮定すると, (1)より $(2a_k+b_k,\ 3a_k+2b_k)$ も①上の点である.

このとき　
$$\sqrt{3}\,a_{k+1}+b_{k+1}=(2+\sqrt{3})^{k+1}$$
$$=(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^k$$
$$=(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}\,a_k+b_k)$$
$$=(3a_k+2b_k)+\sqrt{3}(2a_k+b_k)$$

これを満たす整数 a_{k+1}, b_{k+1} は　$a_{k+1}=2a_k+b_k$, $b_{k+1}=3a_k+2b_k$　である.

よって, $(a_{k+1},\ b_{k+1})$ は①上にある. したがって　$n=k+1$ のときも成り立つ.

以上より, すべての自然数 n で題意を満たす.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　場合の数・確率

1　A，B，C，Dがそれぞれ表に a，b，c，d と書かれたカードを持っている（カードの裏には何も書かれていない）．４人全員が自分のカードを裏返して場に出し，どれがどのカードかわからないようシャッフルした後１人１枚ずつ引くとする．次の問いに答えよ．

(1)　Aが a のカードを引く確率を求めよ．

(2)　Aが b のカードを引き，残りのB，C，Dのうちの誰かがもともと自分自身の持っていたカードを引く確率を求めよ．

(3)　自分自身の持っていたカードを誰も引かない確率を求めよ．

４人のカードの引き方の総数は　$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1$（通り）

(1)　Aが a のカードを引くとき，残り３人のカードの引き方は $3!$ 通り．

よって，求める確率は　$\dfrac{3!}{4!}=\mathbf{\dfrac{1}{4}}$

(2)　Aが b のカードを引くとき，残り a，c，d のカードについて題意を満たす引き方は，B，C，Dが引くカードを (B，C，D) と表すと (B，C，D)$=(a,\ c,\ d)$，$(d,\ c,\ a)$，$(c,\ a,\ d)$ の３通り．

よって，求める確率は　$\dfrac{3}{4!}=\mathbf{\dfrac{1}{8}}$

(3)　Aが b を引くとき，題意を満たすのは (B，C，D)$=(a,\ d,\ c)$，$(c,\ d,\ a)$，$(d,\ a,\ c)$ の３通り．Aが c，d を引くときも同様３通り．よって，求める確率は　$\dfrac{3+3+3}{4!}=\mathbf{\dfrac{3}{8}}$

2　[1]　袋Aの中に赤球２個，袋Bの中に白球２個が入っている．「Aから無作為に１個の球を取り出してBに入れ，その後Bの中から無作為に１個の球を取り出してAに戻す」という操作を繰り返す．いま n 回操作した後に，Aの中に赤球が0，1，２個入っているという事象を，それぞれ $A_n(0)$，$A_n(1)$，$A_n(2)$ で表す．このとき，事象 $A_n(0)$，$A_n(1)$，$A_n(2)$ のそれぞれが起こる確率を求めよ．

$A_n(0)$，$A_n(1)$，$A_n(2)$ が起こる確率をそれぞれ $p_n(0)$，$p_n(1)$，$p_n(2)$ とする．

$A_n(0)$ のときAの袋は２個とも白，Bの袋は２個とも赤である．

よって，AからBに移したあと，Bから白を取り出せば $A_{n+1}(0)$ となる．

$A_n(1)$ のときA，Bともに赤，白１個ずつ．

よって，Aから赤を取り出し，Bから白を取り出せば $A_{n+1}(0)$ となる．

$A_n(2)$ のときは次の試行で $A_{n+1}(0)$ になることはない．

ゆえに　$p_{n+1}(0)=\dfrac{1}{3}p_n(0)+\dfrac{1}{6}p_n(1)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また，赤と白を逆に考えることにより　$p_{n+1}(2)=\frac{1}{3}p_n(2)+\frac{1}{6}p_n(1)$　となる．

よって　$p_{n+1}(1)=1-\{p_{n+1}(0)+p_{n+1}(2)\}=1-\frac{1}{3}\{p_n(0)+p_n(1)+p_n(2)\}=\frac{2}{3}$

また，$p_1(0)=0$，$p_1(1)=\frac{2}{3}$，$p_1(2)=\frac{1}{3}$ である．

したがって　$p_{n+1}(0)=\frac{1}{3}p_n(0)+\frac{1}{9}$

つまり　$p_{n+1}(0)-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\left\{p_n(0)-\frac{1}{6}\right\}$，$p_1(0)-\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}$

ゆえに　$p_n(0)=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\boldsymbol{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$，$p_n(1)=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$，

$p_n(2)=1-\{p_n(0)+p_n(1)\}=\boldsymbol{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

2　[2]　a 個の白球と b 個の赤球が入っているつぼが n 個ある．第 1 のつぼから 1 個の球を取り出して第 2 のつぼに入れ，次に第 2 のつぼから 1 個の球を取り出して第 3 のつぼに入れる．この操作を続けて最後に第 n のつぼから取り出された球が赤球である確率を求めよ．ただし，つぼから各球は等しい確率で取り出されるものとする．

第 1 のつぼから赤球を取り出す確率は　$\frac{b}{a+b}$

第 2 のつぼから赤球を取り出すとき，第 1 のつぼから赤球を取り出した場合と白球を取り出した場合に分けられる．

よって，その確率は　$\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b+1}{a+b+1}+\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b+1}=\frac{b(a+b+1)}{(a+b)(a+b+1)}=\frac{b}{a+b}$

したがって第 k のつぼから赤球を取り出す確率は $\frac{b}{a+b}$ と予想される．これを p_k とする．

第 $k+1$ のつぼから赤球を取り出すとき，第 k のつぼから赤球を取り出した場合と白球を取り出した場合に分けられる．

よって　$p_{k+1}=p_k\cdot\frac{b+1}{a+b+1}+(1-p_k)\cdot\frac{b}{a+b+1}$

$=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b+1}{a+b+1}+\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b+1}=\frac{b}{a+b}$

したがって，すべての自然数 n で　$p_n=\frac{b}{a+b}$　が成り立つ．

ゆえに，求める確率は　$\boldsymbol{\frac{b}{a+b}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　1つのサイコロを何回も振る試行において，初めて6の目が出たら，6の目が出る限り振り続け，6の目が出なくなったとき振ることをやめるものとする．ただし，振る回数は全体で n を越えないものとする．

(1)　上の試行において，6の目が続いてちょうど r 回 $(1 \leqq r \leqq n)$ 出る確率を求めよ．

(2)　上の試行において，6の目が続いてちょうど r 回 $(1 \leqq r \leqq n)$ 出たら 6^{r-1} 円もらう約束をした人が受け取る金額の期待値を求めよ．

(1)　6の目が続いてちょうど r 回出るとき

(i)　最後が6のとき

最初の $n-r$ 回は6以外の目が出て，その後の r 回はすべて6が出る場合である．

その確率は　$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-r} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^r$

(ii)　最後が6以外のとき

最初の $k-r-1$ 回 $(r+1 \leqq k \leqq n)$ に6以外の目が出て，その後 r 回連続で6が出て，最後に6以外の目が出る場合である．

その確率は　$\displaystyle\sum_{k=r+1}^{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-r} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^r = \frac{\frac{5}{6}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-r}\right\}}{1-\frac{5}{6}} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^r = \left\{5-5\left(\frac{5}{6}\right)^{n-r}\right\} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^r$

(i)，(ii)より，求める確率は　$\boldsymbol{\left\{5-4\left(\frac{5}{6}\right)^{n-r}\right\} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^r}$

(2)　求める期待値は

$$\sum_{r=1}^{n} 6^{r-1} \times \left(\frac{1}{6}\right)^r \left\{5-4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-r}\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{r=1}^{n}\left\{5-4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-r}\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{5n-4\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{5}{6}\right)^i\right\}$$

$$=\frac{5}{6}n-\frac{2}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{5}{6}n-4+4\left(\frac{5}{6}\right)^n}\ (\text{円})$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第8講　整数問題

1　次の問いに答えよ．

(1)　3桁の自然数 $N=100a+10b+c$（a，b，c は整数．$1 \leqq a \leqq 9$，$0 \leqq b \leqq 9$，$0 \leqq c \leqq 9$）がある．2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは座標が整数である異なる2点で x 軸と交わり，グラフと x 軸とで囲まれる部分の面積が4となる．このとき N を求めよ．

(2)　5を加えると7で割り切れ，7を加えると11で割り切れる3桁の自然数のうち最小のものを求めよ．

(1)　$y=ax^2+bx+c$ が x 軸と $x=\alpha$，β（α，β は整数，$\alpha<\beta$）で交わるとすると

$$-\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)dx=4 \quad より \quad -a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=4$$

$$-a\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}=4 \qquad よって \quad a(\beta-\alpha)^3=24=3\cdot 2^3$$

これを満たす整数の組（$1 \leqq a \leqq 9$）は $a=3$，$\beta-\alpha=2$ のみである．

このとき　$y=3(x-\alpha)(x-\alpha-2)=3x^2-6(\alpha+1)x+3\alpha(\alpha+2)$

これを $y=ax^2+bx+c$ と係数比較して　$b=-6(\alpha+1)$，$c=3\alpha(\alpha+2)$

$0 \leqq b \leqq 9$ より　$\alpha+1=0$，-1　　つまり　$\alpha=-1$，-2

$c \geqq 0$ より　$\alpha \leqq -2$，$0 \leqq \alpha$　　ゆえに　$\alpha=-2$ に限られる．このとき　$b=6$，$c=0$

ゆえに　$N=\mathbf{360}$

(2)　求める自然数を x とおくと

　$x+5=7m$，$x+7=11n$　（m，n は整数）　とおける．

よって　$7m-5=11n-7$　　これを満たす m, n の1つとして $n=4$，$m=6$ があげられる．

したがって　$7(m-6)=11(n-4)$

7と11は互いに素より　$m-6=11k$　（k：整数）　とおける．よって　$m=11k+6$

このとき　$x=7(11k+6)-5=77k+37$

これを満たす3桁の自然数 x のうち，最小のものは　$77\cdot 1+37=\mathbf{114}$

2　整数を係数とする3次の等式

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

について，次の(1)，(2)を証明せよ．

(1)　有理数 α が方程式 $f(x)=0$ の1つの解ならば，α は整数である．

(2)　ある自然数 k (>1) に対して，k 個の整数 $f(1)$，$f(2)$，……，$f(k)$ のどれもが k で割り切れなければ，方程式 $f(x)=0$ は有理数の解をもたない．

(1)　$\alpha=\dfrac{n}{m}$（m，n は互いに素の整数）とおく．　$f(\alpha)=0$ より　$\dfrac{n^3}{m^3}+\dfrac{an^2}{m^2}+\dfrac{bn}{m}+c=0$

よって　$n^3=-an^2m-bnm^2-cm^3=-(an^2+bnm+cm^2)m$

m，n は互いに素より，$m=1$ に限られる．よって，α は整数である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$f(x)=0$ が有理数解 α をもつとすると $\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c=0$ であり，また(1)より α は整数である．よって　$\alpha=km+r$　(m，r は整数．$1\leqq r\leqq k$)　とおける．

$$f(\alpha)=(km+r)^3+a(km+r)^2+b(km+r)+c$$
$$=(k^2m^3+3km^2r+3mr^2+akm^2+2amr+bm)k+r^3+ar^2+br+c$$

(　　) 内を M とおく．

$\alpha=r$ のとき　$r^3+ar^2+br+c=\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c=0$

よって　$f(r)=Mk$　より　$1\leqq r\leqq k$ である r について $f(r)$ は k で割り切れる．

ゆえに，対偶が真より，もとの命題も真である．

3　正の整数 a に対し，a の正の約数全体の和を $S(a)$ で表す．たとえば，$a=15$ ならば 15 の正の約数は 1，3，5，15 なので，$S(15)=24$ となる．次の問いに答えよ．

(1)　a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a=pq$ と表されるとする．このとき $S(a)\geqq(p+1)q$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのは，$q=1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ．

(2)　$a=2^2r$，$b=2^4s$（r，s は正の奇数）の形をした偶数 a，b を考える．$S(a)=2b$，$S(b)=2a$ を満たす a，b を求めよ．

---

(1)　$a=pq$ $(p\geqq2,\ q\geqq1)$ のとき，$pq\geqq2q>q$ より，pq と q は異なる整数である．

よって，a の正の約数には少なくとも pq と q が含まれる．

ゆえに　$S(a)\geqq pq+q=(p+1)q$

等号成立は a の約数が pq と q に限られるとき．

約数には必ず 1 が含まれるため，$q=1$ である．

また p は p と 1 以外に約数をもたない数，すなわち素数である．

(2)　2 と r は互いに素より　$a=2^2r$，$b=2^4s$ のとき

$S(a)=2b$ より　$(1+2+2^2)S(r)=2^5s$　　つまり　$7S(r)=2^5s$

7 と 2 は互いに素より　$s=7s'$　(s' は自然数)　とおける．

このとき　$S(r)=2^5s'=32s'$　……①

$S(b)=2a$ より　$(1+2+2^2+2^3+2^4)S(s)=2^3r$　　つまり　$31S(s)=2^3r$

31 と 2 は互いに素より　$r=31r'$　(r' は自然数)　とおける．

このとき　$S(s)=2^3r'=8r'$　……②

また，$r=31r'$ のとき　(1)より　$S(r)\geqq(31+1)r'=32r'$　……③

（等号成立は $r'=1$ のとき）

①，③より　$32s'\geqq32r'$　よって　$s'\geqq r'$

$s=7s'$ のとき　(1)より　$S(s)\geqq(7+1)s'=8s'$　……④　（等号成立は $s'=1$ のとき）

②，④より　$8r'\geqq8s'$　よって　$r'\geqq s'$

以上より　$r'=s'=1$ のときである．

このとき　$s=7$，$r=31$ より　$a=2^2\cdot31=\mathbf{124}$　　$b=2^4\cdot7=\mathbf{112}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　総合問題(1)

1　以下の設問に答えよ．

(1)　正の実数 a，b に対して次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqq\frac{4}{a+b}$$

(2)　正の実数 x_i $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ に対して次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\geqq\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

(1)　a，$b>0$ より

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2\geqq2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2=4$$

$\left(\text{等号成立は } \frac{b}{a}=\frac{a}{b}\ \ \text{つまり}\ \ a=b\ \text{のとき}\right)$

よって　$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)\geqq4$　より　$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqq\frac{4}{a+b}$

(2)　$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\geqq n^2$　……(※)　について

［Ⅰ］　$n=1$ のとき　(左辺)$=\frac{1}{x_1}\cdot x_1=1$，(右辺)$=1^2=1$　より(※)は成り立つ．

［Ⅱ］　$n=k$ のとき　(※)すなわち　$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)\geqq k^2$　が成り立つと仮定する．

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1}x_i\right)=\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i}+\frac{1}{x_{k+1}}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}x_i+x_{k+1}\right)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)+x_{k+1}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i}+\frac{1}{x_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}x_i+1$$

$$\geqq k^2+\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{x_{k+1}}{x_i}+\frac{x_i}{x_{k+1}}\right)+1$$

$$\geqq k^2+\sum_{i=1}^{k}2\sqrt{\frac{x_{k+1}}{x_i}\cdot\frac{x_i}{x_{k+1}}}+1=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

等号成立は $x_i=x_{k+1}$　つまり　$x_1=x_2=x_3=\cdots\cdots=x_{k+1}$ のとき

よって　$n=k+1$ のときも(※)は成り立つ．

［Ⅰ］，［Ⅱ］より，すべての自然数 n で(※)は成り立つ．

ゆえに　$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\geqq\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　座標空間内の三角柱

$0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 2,\ x \geqq y,\ 0 \leqq z \leqq 2$

を考え，その xy 平面内の面を S，zx 平面内の面を T とする．点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を S 内に，点 $\mathrm{B}(c,\ 0,\ d)$ を T 内にとり，また $\mathrm{C}(2,\ 2,\ 2)$ とする．ただし，点 A，B は原点 O とは異なるとする．

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に直交する単位ベクトルを求め．その単位ベクトルとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積の絶対値を求めよ．

(2)　四面体 OABC の体積を求めよ．ただし，点 O, A, B, C は同一平面上にないとする．

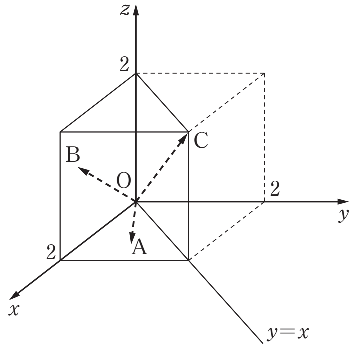
(3)　点 A が S 内を，点 B が T 内を動くとする．このときの，四面体 OABC の体積の最大値，および最大値を与える点 A，B の位置をすべて求めよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2(1,\ 1,\ 1)$ に垂直なベクトルの 1 つは $(b,\ -a,\ a-b)$ である．

これを $\vec{n}$ とすると，求める単位ベクトルは

$$\vec{e}=\pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\pm\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}}(b,\ -a,\ a-b)}$$

$$|\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\frac{|bc+(a-b)d|}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}}=\boldsymbol{\frac{bc+(a-b)d}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}}}$$



(2)　底面を $\triangle\mathrm{OAC}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\vec{e}$ のなす角を θ とすると，

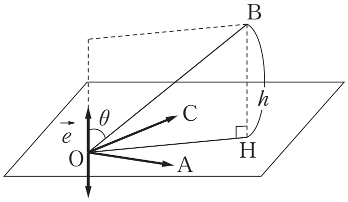
高さは　$h=||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta|=||\vec{e}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta|=|\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$

$$\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)\times(2\sqrt{3})^2-\{2(a+b)\}^2}=2\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}$$

ゆえに　$V=\dfrac{1}{3}\times2\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}\times\dfrac{bc+(a-b)d}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}}$

$$=\boldsymbol{\frac{2\{bc+(a-b)d\}}{3}}$$



(3)　$0 \leqq b \leqq a \leqq 2,\ 0 \leqq c \leqq 2,\ 0 \leqq d \leqq 2$

(i)　$a=b$ のとき　$V=\dfrac{2}{3}bc \leqq \dfrac{2}{3}\cdot2\cdot2=\dfrac{8}{3}$　等号成立は　$a=b=c=2$ のとき　（d は任意）

(ii)　$a>b$ のとき

$b=0$ のとき　$V=\dfrac{2}{3}ad \leqq \dfrac{2}{3}\cdot2\cdot2=\dfrac{8}{3}$

等号成立は　$a=d=2,\ b=0$ のとき　（c は任意）

$b\neq0$ のとき　$V=\dfrac{2}{3}\{bc+(a-b)d\} \leqq \dfrac{2}{3}\{b\cdot2+(a-b)\cdot2\}=\dfrac{4}{3}a \leqq \dfrac{4}{3}\cdot2=\dfrac{8}{3}$

等号成立は　$a=c=d=2$ のとき　（b は任意）

以上より，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{8}{3}}$　**これをとる座標は** $\boldsymbol{\mathrm{A}(2,\ 2,\ 0),\ \mathrm{B}(2,\ 0,\ d)\ \ (0 \leqq d \leqq 2)}$

または　$\boldsymbol{\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(c,\ 0,\ 2)\ \ (0 \leqq c \leqq 2)}$

または　$\boldsymbol{\mathrm{A}(2,\ b,\ 0),\ \mathrm{B}(2,\ 0,\ 2)\ \ (0<b<2)}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　サイコロを振って1または2の目が出れば5点，3または4の目が出れば3点，5または6の目が出れば0点を獲得するとする．サイコロを10回振り，獲得する得点の合計が n 点となる確率を $p(n)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$p(13)$ の値を求めよ．

(2)　$p(7)=0$ となることを証明せよ．

(3)　$p(20)$ の値を求めよ．

(1)　得点が13点になるときを考える．

1，2が出た回数を a，3，4が出た回数を b とすると

$$5a+3b=13$$

$a=0$ のとき　b は整数解なし　　　$a=1$ のとき　b は整数解なし

$a=2$ のとき　$b=1$　　　$a\geqq 3$ のとき　b は正の解なし

したがって　$a=2$，$b=1$

よって　$p(13)=\dfrac{10!}{2!1!7!}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^7=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{2\cdot 1}\cdot\dfrac{1}{3^{10}}=\mathbf{\dfrac{40}{6561}}$

(2)　(1)同様　$5a+3b=7$

$b=0$ のとき　a は整数解なし　　　$b=1$ のとき　a は整数解なし

$b=2$ のとき　a は整数解なし

よって，得点が7点になることはないので　$p(7)=0$

(3)　$5a+3b=20$　　これを満たすのは　$(a,\ b)=(1,\ 5),\ (4,\ 0)$

$$p(20)=\frac{10!}{1!5!4!}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}+\frac{10!}{4!6!}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}=\left(\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}+\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\right)\cdot\frac{1}{3^{10}}=\mathbf{\frac{490}{19683}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 長さ 1 の線分 AB を直径とする円を底面とし，高さが $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の直円錐を考える．この直円錐の側面上で 2 点 A, B を結ぶ最短の道を l とする．直円錐の頂点を C，底面の中心を O とする．以下の問いに答えよ．

(1) l の長さを求めよ．

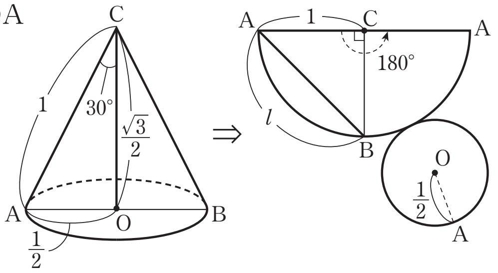
(2) l 上の点 P に対して，線分 CP の延長と弧 AB の交点を Q とする．$\angle \mathrm{AOQ}=\theta$ として CP^2 を $\sin\theta$ で表せ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(3) P から線分 OQ に下ろした垂線を PR とし，A から線分 OQ に下ろした垂線を AS とする．$0^\circ < \theta \leqq 90^\circ$ の範囲で $\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}$ の最大値を求めよ．

(1) 側面の中心角を x° とすると　$2\mathrm{AC}\cdot\dfrac{x}{360}=2\mathrm{OA}$

$$x=360\cdot\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AC}}=360\cdot\frac{1}{2}=180$$

よって，右図より $l=\boldsymbol{\sqrt{2}}$



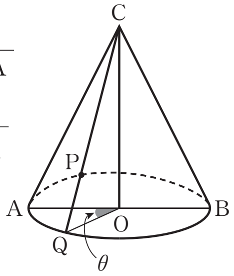
(2) $\angle \mathrm{AOQ}=\theta$ より　$\angle \mathrm{ACQ}=\theta\cdot\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{\theta}{2}$

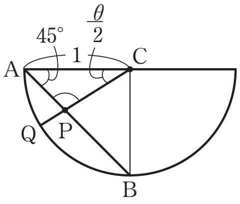
よって　$\angle \mathrm{CPA}=180^\circ-\left(45^\circ+\dfrac{\theta}{2}\right)=135^\circ-\dfrac{\theta}{2}$

△ACP で正弦定理より　$\dfrac{\mathrm{CP}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{1}{\sin\angle \mathrm{CPA}}$

$$\mathrm{CP}^2=\frac{1}{2\sin^2\angle \mathrm{CPA}}=\frac{1}{2\cdot\dfrac{1-\cos 2\angle \mathrm{CPA}}{2}}$$

$$=\frac{1}{1-\cos(270^\circ-\theta)}=\boldsymbol{\frac{1}{1+\sin\theta}}$$



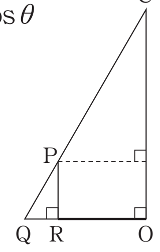


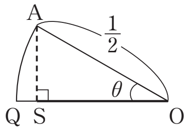
(3) $\mathrm{OR}=\mathrm{CP}\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}\mathrm{CP}$　　$\mathrm{OS}=\mathrm{AO}\cos\theta=\dfrac{1}{2}\cos\theta$

$$\frac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}=\frac{\cos^2\theta}{\mathrm{CP}^2}=\cos^2\theta(1+\sin\theta)$$

$$=(1-\sin^2\theta)(1+\sin\theta)$$

$$=(1+\sin\theta)^2(1-\sin\theta)$$





$\sin\theta=t$ とおくと　$0<t\leqq 1$

$$f(t)=-(t+1)^2(t-1)=-(t+1)^2\{(t+1)-2\}=-(t+1)^3+2(t+1)^2$$

$$f'(t)=-3(t+1)^2+4(t+1)=-(t+1)(3t-1)$$

よって，最大値は　$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{32}{27}}$

t	(0)	…	$\frac{1}{3}$	…	1
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗		↘	

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　座標平面上で，不等式

$$2||x|-4|+||y|-5|\leqq 3$$

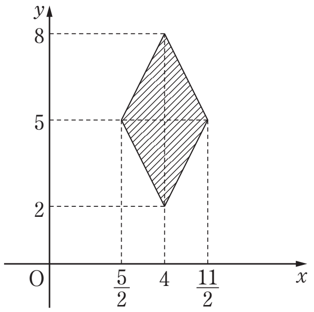
が表す領域を D とする．

(1)　領域 D を図示せよ．

(2)　領域 D 内の点 $(x,\ y)$ で，x が正の整数であり y が整数であって，$\log_x|y|$ が有理数となる点をすべて求めよ．

(1)　$2|x-4|+|y-5|\leqq 3$

これは　$2|x|+|y|\leqq 3$ のグラフを，x 軸方向に 4，y 軸方向に 5　平行移動したものである．(右図)



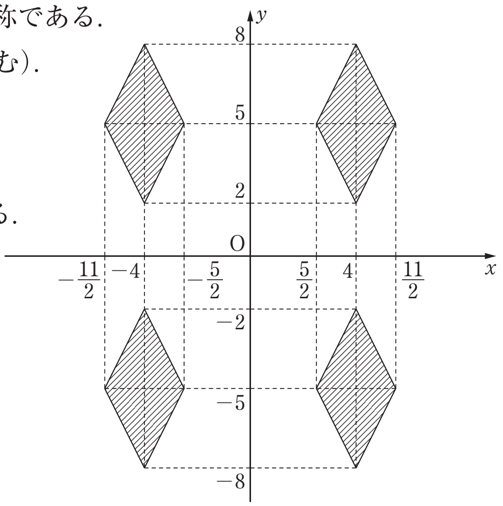
$2||x|-4|+||y|-5|\leqq 3$　について

点 $(a,\ b)$ がこの式を満たせば

$(a,\ -b)$，$(-a,\ b)$，$(-a,\ -b)$ もこの式を満たす．

よって，グラフは x 軸，y 軸，原点に関して対称である．

ゆえに，求める領域は右下図斜線部分（境界含む）．



(2)　$\log_x|y|$ が有理数のとき

$$\log_x|y|=\frac{n}{m}\quad (m,\ n\ \text{は自然数})$$ とおける．

このとき　$|y|^m=x^n$　これを満たす(1)の領域内の点 $(x,\ y)$ を考える．

第 1 象限内の点を考えると

$x=3$ のとき　条件を満たす y は存在しない

$x=4$ のとき　$y=2,\ 4,\ 8$

$x=5$ のとき　$y=5$

よって，図形の対称性より，求める点は　**$(4,\ \pm 2)$，$(4,\ \pm 4)$，$(4,\ \pm 8)$，$(5,\ \pm 5)$**

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　実数 p，自然数 q に対して，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ をそれぞれ

$a_1=-1$，$a_{n+1}=pa_n+p$

$b_1=q$，$b_{n+1}=b_n+(-1)^{n-1}q$

と定める．

(1)　$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ をはじめから順に区画に分け，第 m 区画に属する項の個数が b_m となるようにする．m を正の偶数とするとき第 m 区画に属する項の和 T_m を求めよ．

(1)　**$p=1$ のとき**　$a_{n+1}=a_n+1$，$a_1=-1$　　よって　$a_n=-1+(n-1)\cdot 1=n-2$

ゆえに　$S_n=\dfrac{n\{-1+(n-2)\}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{n(n-3)}{2}}$

$p\neq 1$ のとき　$a_{n+1}=pa_n+p$ より

$$a_{n+1}+\frac{p}{p-1}=p\left(a_n+\frac{p}{p-1}\right),\quad a_1+\frac{p}{p-1}=-1+\frac{p}{p-1}=\frac{1}{p-1}$$

$$a_n+\frac{p}{p-1}=\frac{1}{p-1}\cdot p^{n-1}\qquad \text{よって}\quad a_n=\frac{1}{p-1}(-p+p^{n-1})$$

ゆえに　$S_n=\dfrac{1}{p-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-p+p^{k-1})=\dfrac{1}{p-1}\left(-pn+\dfrac{p^n-1}{p-1}\right)=\boldsymbol{\dfrac{(1-p)pn+p^n-1}{(p-1)^2}}$

(2)　数列 $\{b_n\}$ は q，$2q$，q，$2q$，…… であり，q と $2q$ を繰り返す．

m が正の偶数のとき

第 m 区画の末項は，数列 $\{a_n\}$ の第 $(q+2q)\cdot\dfrac{m}{2}=\dfrac{3}{2}mq$ 項であり

第 $m-1$ 区画の末項は，数列 $\{a_n\}$ の第 $(q+2q)\cdot\dfrac{m-2}{2}+q=\dfrac{3}{2}mq-2q$ 項

$\dfrac{3}{2}mq=N$　とおくと　$\dfrac{3}{2}mq-2q=N-2q$

よって　$p=1$ のとき

$$T_m=S_N-S_{N-2q}=\frac{1}{2}\{N(N-3)-(N-2q)(N-2q-3)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{N^2-3N-N^2+(4q+3)N-2q(2q+3)\}$$

$$=q(2N-2q-3)=q(3mq-2q-3)$$

$p\neq 1$ のとき

$$T_m=\frac{1}{(p-1)^2}\{(1-p)p\{N-(N-2q)\}+p^N-p^{N-2q}\}$$

$$=\frac{1}{(p-1)^2}\left\{2pq(1-p)+p^{\frac{3}{2}mq}(1-p^{-2q})\right\}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

練習問題解答

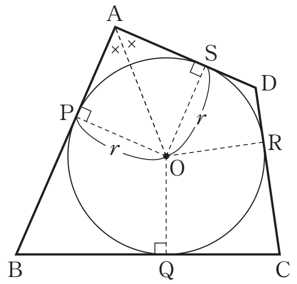
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 四角形ABCDに半径 r の円Oが内接している．四角形ABCDの面積を S とするとき，次の問いに答えよ．

(1) S を r および角 A，B，C，D を用いて表せ．

(2) AD∥BCのとき S の最小値を求めよ．

(1) 辺AB，BC，CD，DAが円Oと接する点をそれぞれP，Q，R，Sとする．



△AOPにおいて　$\mathrm{AP}\tan\frac{A}{2}=r$　より　$\mathrm{AP}=\dfrac{r}{\tan\frac{A}{2}}$

よって　$\triangle\mathrm{AOP}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\dfrac{r}{\tan\frac{A}{2}}=\dfrac{r^2}{2\tan\frac{A}{2}}$　より

四角形APOS$=2\triangle\mathrm{AOP}=\dfrac{r^2}{\tan\frac{A}{2}}$

同様に，四角形BQOP，四角形CROQ，四角形DSORを考えることにより

$$\boldsymbol{S=r^2\left(\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}+\frac{1}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}+\frac{1}{\tan\frac{D}{2}}\right)}$$

(2) AD∥BCのとき，同側内角の和は180°より

$A+B=180°$ であるから　$\frac{B}{2}=90°-\frac{A}{2}$　　よって　$\tan\frac{B}{2}=\tan\left(90°-\frac{A}{2}\right)=\dfrac{1}{\tan\frac{A}{2}}$

同様に，$C+D=180°$ より　$\tan\frac{D}{2}=\dfrac{1}{\tan\frac{C}{2}}$

よって　$S=r^2\left(\tan\frac{A}{2}+\dfrac{1}{\tan\frac{A}{2}}+\tan\frac{C}{2}+\dfrac{1}{\tan\frac{C}{2}}\right)$

証明なく利用できる便利なツール

$\tan\frac{A}{2}>0$，$\tan\frac{C}{2}>0$ より （相加平均）≧（相乗平均） から

$$\tan\frac{A}{2}+\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}\geqq 2\sqrt{\tan\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}}=2,$$

$$\tan\frac{A}{2}+\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}\geqq 2\sqrt{\tan\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}}=2$$

ゆえに　$S\geqq r^2(2+2)=\boldsymbol{4r^2}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

等号成立は　$\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}$　$\left(\tan\frac{A}{2}\right)^2=1$　$\tan\frac{A}{2}=1$　$\frac{A}{2}=45^\circ$　より　$A=90^\circ$

同様に，$C=90^\circ$　すなわち　$A=B=C=D=90^\circ$ のとき（このとき正方形となる）.

※ □ は授業で触れたポイント．定着しているか確認しよう！

2 座標平面の x 軸上に点 A(15, 0) があり，y 軸上の $y>0$ の部分に点 B がある．原点 O と直線 AB との距離，および線分 OB の長さはともに整数である．点 B の座標を求めよ．

点 B の座標を $(0,\ b)$ とおくと，b は正の整数である.

直線 AB の方程式は　$\frac{x}{15}+\frac{y}{b}=1$　すなわち　$bx+15y-15b=0$　である.

原点 O と直線 AB の距離を h とすると

$h=\frac{|-15b|}{\sqrt{b^2+15^2}}=\frac{15b}{\sqrt{b^2+15^2}}$　h は整数より b^2+15^2 が平方数であることが必要.

「必要条件」で攻めることがときには効果的である.

よって　$b^2+15^2=n^2$　（n は正の整数）　とおく.

$n^2-b^2=15^2$　つまり　$(n+b)(n-b)=3^2\cdot5^2$

積の形を作る.

$n+b>n-b$ より，これを満たす整数 $(n+b,\ n-b)$ の組は

$(n+b,\ n-b)=(225,\ 1),\ (75,\ 3),\ (45,\ 5),\ (25,\ 9)$　のみ.

よって　$(n,\ b)=(113,\ 112),\ (39,\ 36),\ (25,\ 20),\ (17,\ 8)$

このうち　$h=\frac{15b}{n}$ が整数となるのは　$n=25,\ b=20$　のときのみ.

ゆえに　**B(0, 20)**

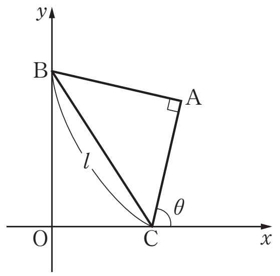
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

九州大数学ⅠAⅡB　第２講　図形と方程式　練習問題　解答

1　辺 BC を斜辺とする直角二等辺三角形 ABC が図の位置にある．BC$=l$ として次の問いに答えよ．

(1)　頂点 A の座標 $(x,\ y)$ を l と θ を用いて表せ．

(2)　B，C がそれぞれ x 軸，y 軸の正の部分を動くとき，点 A の動く範囲を求め，かつ図示せよ．



(1)　$\text{AB}=\text{AC}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{BC}=\dfrac{l}{\sqrt{2}}$ より

三角比・三角関数の知識であるが，図形と方程式において「角度がらみ」で多用される．

点 A の y 座標は $\boxed{y=\text{AC}\sin\theta}=\dfrac{l}{\sqrt{2}}\sin\theta$

また，$\angle\text{BOC}+\angle\text{BAC}=180^\circ$ より四角形 ABOC は円に内接する．

よって　$\angle\text{ABO}=\theta$ より

点 A の x 座標は $\boxed{x=\text{AB}\sin\theta}=\dfrac{l}{\sqrt{2}}\sin\theta$

ゆえに　$\boldsymbol{(x,\ y)=\left(\dfrac{l}{\sqrt{2}}\sin\theta,\ \dfrac{l}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)}$

> A から x 軸への垂線の足を D とし，
> $\angle\text{BCO}=135^\circ-\theta$ を利用すると
> $\text{CD}=\text{AC}\cos\theta=\dfrac{l}{\sqrt{2}}\cos\theta$
> $\text{OC}=l\cos(135^\circ-\theta)$　より
> $\text{OD}=\text{OC}+\text{CD}$
> $\quad=l\cos(135^\circ-\theta)+\dfrac{l}{\sqrt{2}}\cos\theta=\dfrac{l}{\sqrt{2}}\sin\theta$

(2)　B，C がそれぞれ x 軸，y 軸の正の部分を動くとき，$45^\circ<\theta<135^\circ$

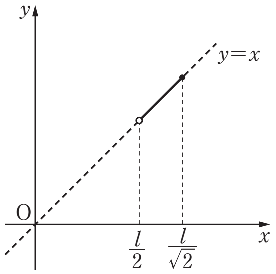
> 図形を利用して BC を動かしながら範囲を定める．

よって　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\sin\theta\leqq 1$　より　$\dfrac{l}{2}<x\leqq\dfrac{l}{\sqrt{2}}$

ゆえに，求める軌跡は

直線　$\boldsymbol{y=x}$　の　$\boldsymbol{\dfrac{l}{2}<x\leqq\dfrac{l}{\sqrt{2}}}$ の部分．

図示すると，右図実線部分．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 円 C_1：$x^2+y^2=25$ と円 C_2：$(x-10)^2+(y-5)^2=50$ の 2 つの交点と原点を通る円を C_3 とする．次の問いに答えよ．

(1) 円 C_3 の中心と半径を求めよ．

(2) 点 P$(x,\ y)$ が円 C_3 上を動くとき，$2y-x$ の最大値を求めよ．

(3) 円 C_1 と円 C_2 の 2 つの交点を通る円の中心の軌跡を求めよ．

(4) 円 C_1 と円 C_2 の 2 つの交点を通る円を C とする．点 Q$(x,\ y)$ が円 C 上を動くとき，$2y-x$ の最大値が最小となる円 C の中心と半径を求めよ．

(1) 2 円 C_1，C_2 の交点を通る図形は

$x^2+y^2-20x-10y+75+k(x^2+y^2-25)=0$ ……① （k：実数） と表される．

これが原点を通るとき　$75-25k=0$　より　$k=3$

よって，求める円 C_3 の方程式は

$4x^2+4y^2-20x-10y=0$　　ゆえに　$\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{125}{16}$

したがって，中心は $\left(\boldsymbol{\dfrac{5}{2}},\ \boldsymbol{\dfrac{5}{4}}\right)$　半径は $\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{5}}{4}}$

(2) $2y-x=k$ とおき，$2y-x-k=0$ $\left(傾き \dfrac{1}{2} の直線\right)$ が円 C_3 と共有点をもつときの k の最大値を求める．

C_3 の中心 $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{4}\right)$ と $2y-x-k=0$ の距離と C_3 の半径との関係　より　←　**２グラフの位置関係を「距離」で判断**

$\dfrac{\left|\dfrac{5}{2}-2\cdot\dfrac{5}{4}+k\right|}{\sqrt{1+4}}\leqq\dfrac{5\sqrt{5}}{4}$　　$|k|\leqq\dfrac{25}{4}$　　よって　$-\dfrac{25}{4}\leqq k\leqq\dfrac{25}{4}$

ゆえに，求める最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{25}{4}}$

(3) 2 円が異なる 2 交点 A，B をもつとき，その 2 円の中心はともに共通弦 AB の垂直二等分線上にある．よって，求める円の中心は，2 円 C_1，C_2 の共通弦の垂直二等分線である．

①で $k=-1$ のとき　$-20x-10y+100=0$　つまり　$y=-2x+10$

これが共通弦の方程式．

よって，求める軌跡は，C_1 の中心 $(0,\ 0)$ を通る傾き $\dfrac{1}{2}$ の直線 $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x}$ である．

(4) (3)より，円 C の中心は $(2t,\ t)$ とおける．半径は $\sqrt{(2t-3)^2+(t-4)^2}=\sqrt{5t^2-20t+25}$

(2)と同様に考えて　$\dfrac{|2t-2t+k|}{\sqrt{1+4}}\leqq\sqrt{5t^2-20t+25}$　　$|k|\leqq5\sqrt{t^2-4t+5}$

よって　$-5\sqrt{t^2-4t+5}\leqq k\leqq5\sqrt{t^2-4t+5}$　より　$2y-x$ の最大値は　$5\sqrt{t^2-4t+5}$

これが最小となるのは　$5\sqrt{t^2-4t+5}=5\sqrt{(t-2)^2+1}$　より　$t=2$ のときである．

このとき C の中心は　$\boldsymbol{(4,\ 2)}$，半径は　$\boldsymbol{\sqrt{5}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　係数 a，b，c，d が実数である x の 3 次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ が極大値と極小値をとり，かつこの関数の表すグラフの極大値，極小値を与える点が原点に関して対称ならば，このグラフは原点に関して対称であることを証明せよ．

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおくと，$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

極値を与える点が原点に関して対称より，その 2 点を $(p,\ q)$，$(-p,\ -q)$ とおく．

この 2 点がいずれも $y=f(x)$ 上にあることより

$q=ap^3+bp^2+cp+d$　……①

$-q=-ap^3+bp^2-cp+d$　……②

また，極値をとる点における接線の傾きは 0 より

$3ap^2+2bp+c=0$　……③

$3ap^2-2bp+c=0$　……④

①＋②より　$2bp^2+2d=0$

③－④より　$b=0$　　よって　$d=0$

したがって　$f(x)=ax^3+cx$

これは奇関数より，グラフは原点に関して対称である．

y 軸対称　→　x を $-x$ に変えても y 座標が同じ．偶関数 x 軸対称　→　y を $-y$ に変えても x 座標が同じ．奇関数 原点対称　→　$(x,\ y)$ を $(-x,\ -y)$ に変えても同じ． である．次の問題で再度確認してほしい．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　$f(x)=|x(x^2-1)|-x^2$ とする．

(1)　$y=f(x)$ で表される座標平面上の曲線を C とする．C と x 軸との共有点のうち x 座標が最大である点を求めよ．

(2)　関数 $f(x)$ の極大値と極小値を求めよ．

(3)　k を実数とする．2 つの曲線 $y=|x(x^2-1)|$ と $y=x^2+k$ の共有点の個数が最大となるとき k のとり得る値の範囲を求めよ．

(1)　$f(-x)=|-x(x^2-1)|-x^2=|x(x^2-1)|-x^2=f(x)$ より

$y=f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である．

題意より x 座標が最大である点を求めるので，$x\geqq 0$ のときのみを考える．

このとき　$f(x)=x|x^2-1|-x^2=\begin{cases} x(x^2-1)-x^2=x(x^2-x-1) & (x\geqq 1) \\ -x(x^2-1)-x^2=-x(x^2+x-1) & (0\leqq x<1) \end{cases}$

$f(x)=0$ より　$x\geqq 1$ のとき　$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　　$0\leqq x<1$ のとき　$x=0,\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

ゆえに，x 座標が最大である点は　$\left(\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ 0}\right)$

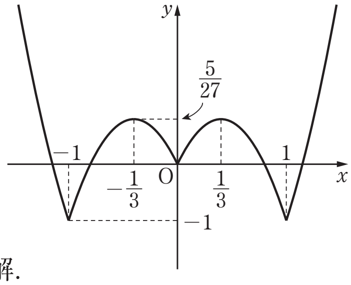
(2)　$x\geqq 1$ のとき　$f(x)=x^3-x^2-x$ より　$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

よって，この範囲において $f(x)$ は単調増加である．

$0\leqq x<1$ のとき　$f(x)=-x^3-x^2+x$ より　$f'(x)=-3x^2-2x+1=-(3x-1)(x+1)$

よって，$x=\dfrac{1}{3}$ の前後で増加から減少に転じる．

以上と y 軸対称であることを考慮し，$y=f(x)$ のグラフは右図．



よって　極大値は　$f\left(\pm\dfrac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{5}{27}}$

極小値は　$f(0)=\mathbf{0}$，$f(\pm 1)=\mathbf{-1}$

(3)　$y=|x(x^2-1)|$　と　$y=x^2+k$　の共有点の x 座標は

$|x(x^2-1)|=x^2+k$　すなわち　$|x(x^2-1)|-x^2=k$　の解．

よって，$y=f(x)$ のグラフと $y=k$ のグラフの交点の x 座標である．

この個数の最大は 6 個であり，そのときの k の取り得る値の範囲は　$\boldsymbol{0<k<\dfrac{5}{27}}$　である．

講義でもふれたように，極値をとる x 座標は必ずしも $f'(x)=0$ から導かれるわけではない．
大切なのは $f'(x)$ の符号であり，それは $f'(x)$ のグラフによって明確になる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 a を正の実数とし，点 $\mathrm{A}\left(0,\ a+\dfrac{1}{2a}\right)$ と曲線 $C : y=ax^2\ (x \geqq 0)$ を考える．曲線 C 上の点で，点 A との距離が最小となるものを P とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ．

(2) 曲線 C と y 軸，および線分 AP で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ．

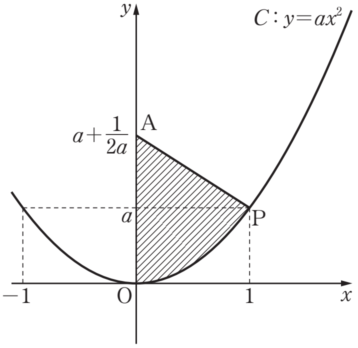
(3) $a>0$ のとき，面積 $S(a)$ の最小値を求めよ．また，そのときの a の値を求めよ．

(1) $\mathrm{P}(t,\ at^2)$　$(t>0)$　とおくと

$$\mathrm{AP}^2=t^2+\left\{at^2-\left(a+\frac{1}{2a}\right)\right\}^2=a^2t^4-2a^2t^2+\left(a+\frac{1}{2a}\right)^2=a^2(t^2-1)^2+1+\frac{1}{4a^2}$$

これが最小となるのは　$t^2=1$　より　$t=1$ のとき

ゆえに　$\mathbf{P(1,\ a)}$　　$\mathbf{AP}=\sqrt{1+\dfrac{1}{4a^2}}$



(2) $$S(a)=\frac{1}{2}\left\{\left(a+\frac{1}{2a}\right)-a\right\}\cdot 1+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(a-ax^2)\,dx$$

$$=\frac{1}{4a}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}-a(x+1)(x-1)\,dx$$

$$=\frac{1}{4a}+\frac{1}{2}\cdot\boxed{\frac{a}{6}\cdot\{1-(-1)\}^3}=\mathbf{\frac{2}{3}a+\frac{1}{4a}}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(3) $a>0$ のとき

$$S(a)=\frac{2}{3}a+\frac{1}{4a}\geqq 2\sqrt{\frac{2}{3}a\cdot\frac{1}{4a}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

等号成立は　$\dfrac{2}{3}a=\dfrac{1}{4a}$　つまり　$a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　のとき

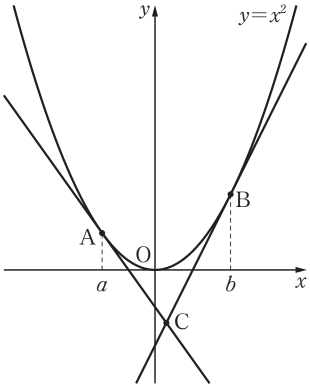
したがって　$\boldsymbol{a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}}$ のとき　$S(a)$ は最小値　$\mathbf{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$　をとる．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線 l と，点 $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ における接線 m との交点を C とおく．ただし，$a<b$ とする．

(1) 2 直線 l，m と放物線 $y=x^2$ とで囲まれる部分の面積 S を a と b で表せ．

(2) 点 C が放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-2$ の上を動くときの面積 S の最小値を求めよ．



(1) $y=x^2$ より　$y'=2x$

接線 l の方程式は $y=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2$

接線 m の方程式は $y=2bx-b^2$

この 2 式より y を消去して $2ax-a^2=2bx-b^2$　　$x=\dfrac{a+b}{2}$

よって，l と m の交点 C の座標は $\left(\dfrac{a+b}{2},\ ab\right)$

題意の面積は

$$S=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\{x^2-(2ax-a^2)\}dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\{x^2-(2bx-b^2)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_a^{\frac{a+b}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-b)^3\right]_{\frac{a+b}{2}}^{b}=\frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{1}{12}(b-a)^3}$$

展開せずに積分

(2) $\mathrm{C}(X,\ Y)$ とおくと　$X=\dfrac{a+b}{2}$，$Y=ab$

C が放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-2$ 上の点より　$Y=\dfrac{1}{2}X^2-X-2$

ここで　$(b-a)^2=(a+b)^2-4ab=4X^2-4Y=2X^2+4X+8=2(X+1)^2+6$　より

$b-a$ は　$X=-1$ のとき　最小値　$\sqrt{6}$　となる．

よって，求める S の最小値は　$\dfrac{1}{12}(\sqrt{6})^3=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 四面体 OABC において，$\angle AOB=\angle AOC=\angle BOC=\theta\,(0^\circ<\theta<90^\circ)$，$OA=OB=2$，$OC=1$ とする．点 M，N をそれぞれ辺 OA，AB の中点とし，半直線 CM 上に点 P，半直線 ON 上に Q をとる．いま，PQ が最小となるとき，次の問いに答えよ．

(1) $\vec{a}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とするとき，$\overrightarrow{PQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(2) $\theta=60^\circ$ のとき，P，Q がそれぞれ線分 CM，ON をどのような比に分けるか答えよ．また，そのときの PQ の長さを求めよ．

(1) PQ が最小となるのは，$PQ\perp CM$　かつ　$PQ\perp ON$　のとき　である．

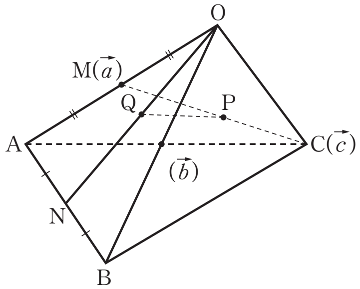
最短距離＝垂直となるとき

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\cos\theta$　$(0<\cos\theta<1)$

$\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+(1-s)\vec{c}=\vec{c}+s(\vec{a}-\vec{c})$　$(s\geqq 0)$

$\overrightarrow{OQ}=t'\overrightarrow{ON}=t'\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)=t(\vec{a}+\vec{b})$　$(t\geqq 0)$　とおける．

よって　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=-(\vec{a}-\vec{c})s+(\vec{a}+\vec{b})t-\vec{c}$



$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CM}=0$ より　$\{(\vec{c}-\vec{a})s+(\vec{a}+\vec{b})t-\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$

$|\vec{c}-\vec{a}|^2=2-2\cos\theta=2(1-\cos\theta)$,

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\cos\theta-1$，$\vec{c}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=1-\cos\theta$

よって　$2s-t-1=0$　……①

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{ON}=0$ より　$\{(\vec{c}-\vec{a})s+(\vec{a}+\vec{b})t-\vec{c}\}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0$

よって　$(\cos\theta-1)s+2(1+\cos\theta)t-2\cos\theta=0$　……②

①より　$t=2s-1$　これを②に代入して

$(5\cos\theta+3)s=4\cos\theta+2$　　$s=\dfrac{4\cos\theta+2}{5\cos\theta+3}(>0)$　　このとき　$t=\dfrac{3\cos\theta+1}{5\cos\theta+3}(>0)$

ゆえに　$\overrightarrow{PQ}=(t-s)\vec{a}+t\vec{b}-(1-s)\vec{c}=\boldsymbol{-\dfrac{\cos\theta+1}{5\cos\theta+3}\vec{a}+\dfrac{3\cos\theta+1}{5\cos\theta+3}\vec{b}-\dfrac{\cos\theta+1}{5\cos\theta+3}\vec{c}}$

(2) $\theta=60^\circ$ のとき　$s=\dfrac{8}{11}$，$t=\dfrac{5}{11}$

ゆえに，P は線分 CM を **8：3 に内分**する点，Q は線分 ON を **5：6 に内分**する点である．

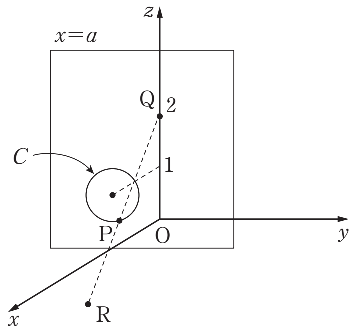
また　$\overrightarrow{PQ}=-\dfrac{1}{11}(3\vec{a}-5\vec{b}+3\vec{c})$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{1}{2}$　より　$|3\vec{a}-5\vec{b}+3\vec{c}|^2=9+25+9-15-15+9=22$

ゆえに　$|\overrightarrow{PQ}|=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{22}}{11}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

> **2** 中心が $(0,\ 0,\ 1)$，半径が1の球面が，yz 平面に平行で点 $(a,\ 0,\ 0)$ $(0<a<1)$ を通る平面と交わってできる図形を C とする．
> (1) C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ y_1,\ z_1)$ と点 $\mathrm{Q}(0,\ 0,\ 2)$ を通る直線 PQ が xy 平面と交わる点を $\mathrm{R}(x,\ y,\ 0)$ とする．y_1 と z_1 をそれぞれ a，x，y を使って表せ．
> (2) 点 P が C 上を動くとき，点 R の軌跡を求めよ．



(1) 題意より直線 QR 上に点 P があるので

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ とおける．　←**直線のベクトル方程式**

よって　$(a,\ y_1,\ z_1)=(0,\ 0,\ 2)+t(x,\ y,\ -2)$

$a=tx$ ……①　　$y_1=ty$ ……②

$z_1=2-2t$ ……③

①より　$t=\dfrac{a}{x}$　($a\neq0$ より　$x\neq0$)

このとき　②より　$\boldsymbol{y_1=\dfrac{ay}{x}}$　　③より　$\boldsymbol{z_1=2-\dfrac{2a}{x}}$　である．

(2) C は球：$x^2+y^2+(z-1)^2=1$　と　平面 $x=a$　の交わりより　$y^2+(z-1)^2=1-a^2$

点 $\mathrm{P}(a,\ y_1,\ z_1)$ が C 上を動くとき，

$y_1{}^2+(z_1-1)^2=1-a^2$　つまり　$\left(\dfrac{ay}{x}\right)^2+\left(1-\dfrac{2a}{x}\right)^2=1-a^2$　を満たす．

$a^2y^2+(x-2a)^2=(1-a^2)x^2$

$a^2x^2+a^2y^2-4ax+4a^2=0$

$a\neq0$ より　$x^2+y^2-\dfrac{4}{a}x+4=0$　　よって　$\left(x-\dfrac{2}{a}\right)^2+y^2=\dfrac{4}{a^2}-4$

$0<a<1$ より　$\dfrac{4}{a^2}-4=4\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)>0$

よって，求める点 R の軌跡は　**中心 $\left(\dfrac{2}{a},\ 0,\ 0\right)$，半径 $2\sqrt{\dfrac{1}{a^2}-1}$　の円**である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 xy 平面上の曲線 $y=x^2$ を C とする．点 $P_0(2,\ 4)$ における C の接線が直線 $y=2$ と交わる点を $Q_1(a_1,\ 2)$ とする．次に，点 $P_1(a_1,\ a_1{}^2)$ における C の接線が直線 $y=a_1$ と交わる点を $Q_2(a_2,\ a_1)$ とする．以下同様に，点 $(a_n,\ a_n{}^2)$ を P_n とし，P_n における C の接線が $y=a_n$ と交わる点を $Q_{n+1}(a_{n+1},\ a_n)$ として，P_2，Q_3，P_3，Q_4，…… を定める．次の問いに答えよ．

(1) a_1 を求めよ．

(2) a_n を n の式で表せ．

(3) 線分 P_nQ_{n+1}，線分 $P_{n+1}Q_{n+1}$，および C で囲まれる部分の面積を n の式で表せ．

(1) $C：y=x^2$ より　$y'=2x$　　よって　$P_0(x=2)$ における C の接線の方程式は

$y=4(x-2)+4$　つまり　$y=4x-4$　　これと $y=2$ との交点の x 座標は　$x=\dfrac{3}{2}$

これが Q_1 の x 座標 a_1 であることより　$\boldsymbol{a_1=\dfrac{3}{2}}$

(2) P_n　$(x=a_n)$　における C の接線の方程式は

$y=2a_n(x-a_n)+a_n{}^2$　つまり　$y=2a_nx-a_n{}^2$

これと $y=a_n$ との交点の x 座標は　$a_n=2a_nx-a_n{}^2$　　$a_n\neq0$ より　$x_n=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}$

これが Q_{n+1} の x 座標 a_{n+1} であることより　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}$

つまり　$a_{n+1}-1=\dfrac{1}{2}(a_n-1)$，$a_1-1=\dfrac{1}{2}$　より　$a_n-1=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

ゆえに　$\boldsymbol{a_n=1+\dfrac{1}{2^n}}$

(3) Q_{n+1} の y 座標が P_n の x 座標であることより，右図から

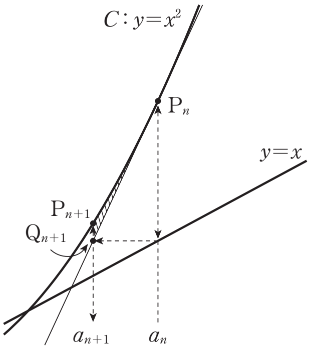
$0<a_{n+1}<a_n$　である．

よって，求める面積は

$$\int_{a_{n+1}}^{a_n}\{x^2-(2a_nx-a_n{}^2)\}dx=\int_{a_{n+1}}^{a_n}(x-a_n)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-a_n)^3\right]_{a_{n+1}}^{a_n}=\frac{1}{3}(a_n-a_{n+1})^3$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)^3=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^3=\boldsymbol{\frac{1}{3\cdot8^{n+1}}}$$



まず問題から「流れ」を把握することが必要である．どのような「動き」をもって問題が成り立っているのかを掴むことで，それに基づいて漸化式をたてることができる．特に(3)においてはその動きがわかることが必要である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 n は 2 以上の整数であり，$\frac{1}{2}<a_j<1$（$j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$）とする．このとき，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)\quad\cdots\cdots(※)$$

が成り立つことを示せ．

［Ⅰ］ $n=2$ のとき

$$(1-a_1)(1-a_2)-\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}\right)\right\}=a_1a_2-\frac{a_2}{2}=a_2\left(a_1-\frac{1}{2}\right)>0\qquad\left(\frac{1}{2}<a_1,\ a_2<1\text{ より}\right)$$

よって，$n=2$ のときに(※)は成り立つ．

［Ⅱ］ $n=k$ のときに(※)が成り立つと仮定する．

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)$$

ここで

この置き換えは，いたずらに答案が助長するのを防ぐため．

$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)=A_k,\quad a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}=B_k$ とおくと，

この仮定は　$A_k>1-B_k$　と表される．

このとき　$A_{k+1}=A_k\cdot(1-a_{k+1})=A_k-a_{k+1}A_k>1-B_k-a_{k+1}A_k=1-(B_k+a_{k+1}A_k)$

ここで

目的の形を頭に浮かべ，仮定を用いてまず部分的に下げた．

$$\begin{aligned}&B_{k+1}-(B_k+a_{k+1}A_k)\\&=\frac{a_{k+1}}{2^k}-a_{k+1}A_k\\&=a_{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^k-a_{k+1}(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)\\&=a_{k+1}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^k-(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)\right\}\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

ここで　$\frac{1}{2}<a_i<1$ より　$\frac{1}{2}>1-a_i>0$（$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k$）

であるから　$\left(\frac{1}{2}\right)^k>(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)$

$a_{n+1}>0$ より　(①)>0

$B_k+a_{k+1}A_k<B_{k+1}$　　つまり　$1-(B_k+a_{k+1}A_k)>1-B_{k+1}$

よって，$A_{k+1}>1-B_{k+1}$　となり，$n=k+1$ のときも(※)は成り立つ．

［Ⅰ］，［Ⅱ］より，$n\geqq 2$ のすべての自然数 n で(※)が成り立つ．

数学的帰納法である．第 k 項が成り立つと仮定し，それを用いればすぐに第 $(k+1)$ 項が成り立つほど不等式型の帰納法は甘くはないことは周知の事実であろう．「差をとること」が必要である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 各面に1から8までの数字が1つずつ書かれた正八面体のさいころを繰り返し投げ，n 回目までに出た数字の合計を $X(n)$ とする．$X(n)$ が3で割り切れる確率を a_n，$X(n)$ を3で割ったとき1余る確率を b_n，$X(n)$ を3で割ったとき2余る確率を c_n とする．次の問いに答えよ．ただし，1から8までの数字の出る確率はどれも同じとする．

(1) a_1，b_1，c_1 を求めよ．

(2) a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n を用いて表せ．

(3) a_n，b_n，c_n を求めよ．

(1) $X(1)$ が3で割り切れるのは，出目が3，6のとき．よって　$a_1=\dfrac{2}{8}=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

$X(1)$ を3で割ると1余るのは，出目が1，4，7のとき．よって　$b_1=\boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$

$a_n+b_n+c_n=1$ であることより　$c_1=1-(a_1+b_1)=\boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$

(2) 出目が3，6であることを事象 $R_0$$\left(\text{確率 }\dfrac{1}{4}\right)$，

出目が1，4，7であることを事象 $R_1$$\left(\text{確率 }\dfrac{3}{8}\right)$，

出目が2，5，8であることを事象 $R_2$$\left(\text{確率 }\dfrac{3}{8}\right)$ と表すとする．

$X(n+1)$ が3で割り切れるのは次の通り

(i) $X(n)$ が3で割り切れ，$n+1$ 回目に R_0 が起こる

(ii) $X(n)$ を3で割ると1余り，$n+1$ 回目に R_2 が起こる

(iii) $X(n)$ を3で割ると2余り，$n+1$ 回目に R_1 が起こる

よって　$a_{n+1}=\dfrac{1}{4}a_n+\dfrac{3}{8}b_n+\dfrac{3}{8}c_n=\dfrac{1}{4}a_n+\dfrac{3}{8}(b_n+c_n)=\dfrac{1}{4}a_n+\dfrac{3}{8}(1-a_n)$

ゆえに　$a_{n+1}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{8}a_n+\dfrac{3}{8}}$

同様に　$b_{n+1}=\boldsymbol{\dfrac{3}{8}a_n+\dfrac{1}{4}b_n+\dfrac{3}{8}c_n}$，$c_{n+1}=\boldsymbol{\dfrac{3}{8}a_n+\dfrac{3}{8}b_n+\dfrac{1}{4}c_n}$

(3) $a_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{8}\left(a_n-\dfrac{1}{3}\right)$，$a_1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{12}$　　よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{12}\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{n-1}}$

b_n と c_n の条件の対称性より　$b_n=c_n$

よって　$\boldsymbol{b_n=c_n}=\dfrac{1}{2}(1-a_n)=\dfrac{1}{2}\left\{1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{12}\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{n-1}\right\}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{24}\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{n-1}}$

確率漸化式である．前の状態において，次に何が起これば目的の状態になるかを漸化式で表し，それを解くことで確率を求める手法．今一度確認を．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　袋の中に赤球が a 個，白球が b 個入っている．この袋から無作為に１個の球を取り出し，その色を記録して袋に戻す．この試行をくり返し，同じ色の球が２回続けて出るか，または試行の回数が $2N$ に達したとき，試行を止める．ただし，N は２以上の一定の自然数とする．この試行がちょうど k 回で終わる確率を P_k $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2N)$ とし，$p=\dfrac{a}{a+b}$，$q=\dfrac{b}{a+b}$，$r=pq$ とおく．

(1)　P_{2l}，P_{2l+1} $(l=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N-1)$ および P_{2N} を r を用いて表せ．

(2)　試行の回数の期待値 E は，定数 A，B を用いて $E=\mathrm{A}+\mathrm{B}(r+r^2+\cdots\cdots+r^{N-1})$ と表されることを示し，A，B を求めよ．

１回の試行で赤球が出る確率は $\dfrac{a}{a+b}=p$　　白球が出る確率は $\dfrac{b}{a+b}=q$

(1)　$2l$ 回目で終了するのは $(2l-2)$ 回目まで赤と白が交互に出て，$2l-1$，$2l$ 回目だけ同色が連続するときである．

よって　$P_{2l}=(pq)^{l-1}\cdot p^2+(qp)^{l-1}\cdot q^2=(pq)^{l-1}(p^2+q^2)=r^{l-1}(1-2r)$

$2l+1$ 回目で終了するのは $2l$ 回目まで赤と白が交互に出て，$(2l+1)$ 回目が $2l$ 回目と同色であるときである．

よって　$P_{2l+1}=(pq)^l\cdot q+(qp)^l\cdot p=(pq)^l(p+q)=r^l$

$2N$ 回目で終了するのは

・すべて赤と白が交互にでる　　・$2N-2$ 回目まで交互，$2N-1$，$2N$ 回目だけ同色が連続

のいずれかである．

よって　$P_{2N}=(pq)^N+(qp)^N+r^{N-1}(1-2r)=r^{N-1}$

(2)　$E=2\cdot P_2+3\cdot P_3+\cdots\cdots+2N\cdot P_{2N}$

$$=\sum_{k=2}^{2N}k\cdot P_k=\sum_{l=1}^{N-1}\{2l\cdot P_{2l}+(2l+1)\cdot P_{2l+1}\}+2N\cdot P_{2N}$$

$$=\sum_{l=1}^{N-1}\{2l(r^{l-1}-2r^l)+(2l+1)\cdot r^l\}+2N\cdot r^{N-1}$$

Σを用いた期待値の計算

$$=\sum_{l=1}^{N-1}\{2l\cdot r^{l-1}-(2l-1)\cdot r^l\}+2N\cdot r^{N-1}$$

$$=\{2+4r+\cdots\cdots+(2N-2)r^{N-2}\}$$
$$\quad-\{r+3r^2+\cdots\cdots+(2N-5)r^{N-2}+(2N-3)r^{N-1}\}+2N\cdot r^{N-1}$$

$$=2+3(r+r^2+\cdots\cdots+r^{N-2}+r^{N-1})$$

ゆえに　$\boldsymbol{A=2,\ B=3}$

講義問題同様，終了条件がついた反復試行である．色によるものと回数によるものの条件がついているため，確実に分けて考えよう．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　[1]　a を１以上の整数とするとき，次の各命題の真偽の判定とその根拠となる証明をせよ．

(1)　ある a に対して，$\sqrt{a}$ と $\sqrt{a+1}$ はともに有理数である．

(2)　a が自然数ならば $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$ は無理数である．

[2]　$7l=4m+3$，$lm=139-28n^2+l+m$ を満たす整数の組 $(l,\ m,\ n)$ は何組あるか求めよ．

[1](1)　$\sqrt{a}$ が有理数であると仮定すると $\sqrt{a}=\dfrac{n}{m}$　(n，mは互いに素の自然数)　とおける．

有理数を扱うときの典型的な置き方である．

このとき　$a=\dfrac{n^2}{m^2}$

a は１以上の整数であり，n，m は互いに素の自然数であることから，$m=1$ に限られる．よって　$\sqrt{a}$ は自然数である．

ここで，$\sqrt{a}$ と $\sqrt{a+1}$ はともに有理数，すなわち整数と仮定すると

$$0<\sqrt{a+1}-\sqrt{a}=\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}<1$$

したがって，２整数の差の絶対値が１未満であることより，ともに整数であることに反する．

ゆえに，偽．

(2)　$\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$ が有理数であると仮定すると，

$$\sqrt{a+1}-\sqrt{a}=\frac{n}{m}\quad\cdots\cdots\ ①$$ (n，m は互いに素の自然数)　とおける．

このとき　$\dfrac{m}{n}=\dfrac{1}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}=\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$　……②

(②＋①)÷2 より　$\sqrt{a+1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}\right)$　　(②－①)÷2 より　$\sqrt{a}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m}{n}-\dfrac{n}{m}\right)$

よって，$\sqrt{a+1}$，$\sqrt{a}$ はともに有理数となり，(1)に反する．

したがって，$\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$ は無理数である．ゆえに真．

[2]　$7l=4m+3$　より　$7(l-1)=4(m-1)$

不定方程式．特殊解を自分で発見しよう．

７と４は互いに素より　$l-1=4k$　(kは整数)　とおける．

よって　$l=4k+1$，$m=7k+1$

これらを　$lm=139-28n^2+l+m$　に代入して

$(4k+1)(7k+1)=139-28n^2+4k+1+7k+1$　　$k^2+n^2=5$

これを満たす整数の組は　$(k,\ n)=(\pm1,\ \pm2)$，$(\pm2,\ \pm1)$　(複号任意)

よって，整数の組 $(l,\ m,\ n)$ は **8 組**ある．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　直角三角形 ABC は，∠C が直角で，各辺の長さは整数であるとする．辺 BC の長さが 3 以上の素数 p であるとき，以下の問いに答えよ．

(1)　辺 AB，CA の長さを p を用いて表せ．

(2)　tan∠A と tan∠B は，いずれも整数にならないことを示せ．

(1)　AB$=c$，CA$=b$　(b，c は自然数)　とおく．

三平方の定理により　$p^2=c^2-b^2$

よって　$(c+b)(c-b)=p^2$　← 積の形

$c+b>c-b$ であり，p は素数であることより　$c+b=p^2$，$c-b=1$　のみ

よって　$b=\dfrac{p^2-1}{2}$，$c=\dfrac{p^2+1}{2}$

ゆえに　$\mathbf{AB}=\dfrac{p^2+1}{2}$，$\mathbf{CA}=\dfrac{p^2-1}{2}$

(2)　$\tan\angle\mathrm{A}=\dfrac{p}{b}=\dfrac{2p}{p^2-1}=\dfrac{2p}{(p+1)(p-1)}$

p は 3 以上の素数すなわち奇数より，$p+1$，$p-1$ はともに偶数

よって，分母・分子を 2 で 1 回のみ約分可能であり，必ず分母には偶数が残る．

$$\tan\angle\mathrm{B}=\frac{b}{p}=\frac{(p+1)(p-1)}{2p}$$

同様に，分母・分子を 2 で 1 回のみ約分可能であり，必ず分母には奇数 p が残る．

ゆえに，tan∠A と tan∠B は，いずれも整数にならない．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

九州大数学ⅠAⅡB　第９講　総合問題(1)　練習問題　解答

1 空間ベクトル $\overrightarrow{OP}=(2,\ 1,\ 2)$, $\overrightarrow{OQ}=(2,\ 3,\ 6)$, $\overrightarrow{OR}=(3,\ 6,\ 2)$ がある．このとき次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ の両方に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ．

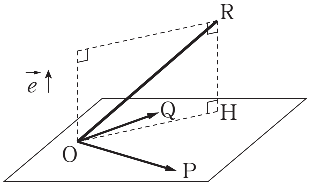
(2) 四面体 OPQR の体積 V を求めよ．

(1) $\overrightarrow{OP}=(2,\ 1,\ 2)$ と $\overrightarrow{OQ}=(2,\ 3,\ 6)$ の両方に垂直なベクトルの１つとして

$\vec{n}=(0,\ -8,\ 4)=4(0,\ -2,\ 1)$ が挙げられる．

よって，求める単位ベクトルは

$$\vec{e}=\pm\frac{1}{\sqrt{4+1}}(0,\ -2,\ 1)=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(0,\ -2,\ 1)$$



(2) 点 R から平面 OPQ に下ろした垂線の足を H とすると

$$RH=|\overrightarrow{OR}\cdot\vec{e}|=\left|3\times0+6\times\frac{-2}{\sqrt{5}}+2\times\frac{1}{\sqrt{5}}\right|=\frac{10}{\sqrt{5}}$$

また，$|\overrightarrow{OP}|^2=4+1+4=9$, $|\overrightarrow{OQ}|^2=4+9+36=49$, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=4+3+12=19$ より

$$\triangle OPQ=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2|\overrightarrow{OQ}|^2-(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{9\times49-19^2}=2\sqrt{5}$$

よって　$V=\dfrac{1}{3}\times2\sqrt{5}\times\dfrac{10}{\sqrt{5}}=\dfrac{20}{3}$

正射影ベクトルを用いた解答である．
(1)がなければまったく別の典型的な解法に持ち込むことも可能だが，誘導に乗る形の解法ができることが望ましい．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　袋の中に0から9までの数字を1つずつ書いたカードが10枚入っている．袋からカード1枚を無作為に取り出して数字を確認したのち，袋にもどす試行を考える．

(1)　この試行を2回繰り返すとする．確認した数字を順に X_1，X_2 とおくとき，等式 $X_1+X_2=X_1X_2$ が成り立つ確率を求めよ．

(2)　この試行を3回繰り返すとする．確認した数字を順に X_1，X_2，X_3 とおくとき，等式 $X_1+X_2+X_3=X_1X_2X_3$ が成り立つ確率を求めよ．

(1)　$X_1+X_2=X_1X_2$ より　$(X_1-1)(X_2-1)=1$

これを満たす整数の組は　$(X_1-1,\ X_2-1)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$

よって　$(X_1,\ X_2)=(2,\ 2),\ (0,\ 0)$ の2通り．

ゆえに，求める確率は　$\dfrac{2}{10^2}=\dfrac{1}{50}$

(2)　$X_1+X_2+X_3=X_1X_2X_3$　……①

まずは　$X_1\leqq X_2\leqq X_3$　のときを考える．　［絞り込み］

①より　$X_1X_2X_3=X_1+X_2+X_3\leqq X_3+X_3+X_3=3X_3$　より　$X_1X_2\leqq 3$

$X_1=0$ のとき　①より　$X_2+X_3=0$　よって　$X_2=X_3=0$

$X_1\neq 0$ のとき　$(X_1,\ X_2)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3)$ のみ

$(X_1,\ X_2)=(1,\ 1)$ のとき　①より　$2+X_3=X_3$　　よって不適

$(X_1,\ X_2)=(1,\ 2)$ のとき　①より　$3+X_3=2X_3$　　ゆえに　$X_3=3$

$(X_1,\ X_2)=(1,\ 3)$ のとき　①より　$4+X_3=3X_3$　　$X_3=2$

よって　$X_1\leqq X_2\leqq X_3$ を満たさず不適

ゆえに　$(X_1,\ X_2,\ X_3)=(0,\ 0,\ 0),\ (1,\ 2,\ 3)$

①は X_1，X_2，X_3 に関して対称より，求める確率は　$\dfrac{1+3!}{10^3}=\mathbf{\dfrac{7}{1000}}$

対称形でかつ大小関係が設定されていない場合は，自分で設定してあとで拡張すると解答を簡潔にまとめることが可能である．また整数問題は「絞り込み」が有効な手段となる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　座標平面上の4点(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)からなる集合をL，不等式$ax+by-c\geqq 0$を満たす実数x，yを座標としてもつ点(x, y)からなる集合をDとする．このとき，LとDの共通部分$L\cap D$について次の問いに答えよ．

(1)　実数a，b，cをどのように選んでも，$L\cap D=\{(0, 0), (1, 1)\}$にならないことを示せ．

(2)　$L\cap D=\{(1, 1)\}$ならば，$\dfrac{c}{\sqrt{2}}\leqq\sqrt{a^2+b^2}<\sqrt{2}\,c$であることを示せ．

(1)　$L\cap D=\{(0, 0), (1, 1)\}$であるとすると，集合$D$に(0, 0), (1, 1)が含まれ，(1, 0), (0, 1)が含まれない．つまり，(0, 0), (1, 1)は$ax+by-c\geqq 0$を満たし，(1, 0), (0, 1)は$ax+by-c<0$を満たす．したがって

$-c\geqq 0$ ……①　$a+b-c\geqq 0$ ……②　$a-c<0$ ……③　$b-c<0$ ……④

①より　$c\leqq 0$ ……①′　②より　$a+b\geqq c$ ……②′

③より　$a<c$ ……③′　④より　$b<c$ ……④′

③′+④′と①′より　$a+b<2c\leqq c$　これと②′を同時に満たすa，b，cは存在しない．

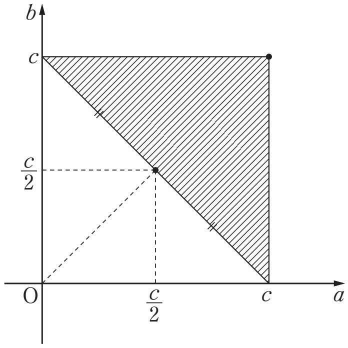
ゆえに　$L\cap D=\{(0, 0), (1, 1)\}$になることはない．

(2)　$L\cap D=\{(1, 1)\}$より，集合Dに(1, 1)が含まれ，(0, 0), (1, 0),(0, 1)が含まれない．

よって　$a+b\geqq c$，$-c<0$，$a-c<0$，$b-c<0$

すなわち　$a+b\geqq c$，$a<c$，$b<c$，$c>0$を満たす．

ここで，cを$c>0$のある値で固定して考えると　a，bの満たす条件は下図斜線部の領域で表される（境界は$a=c$，$b=c$を含まない）．



$\sqrt{a^2+b^2}=k$とおくと，$a^2+b^2=k^2$

よって，原点中心の円が右図領域と共有点をもつときの半径kの最大，最小を考える．

最小となるのは　$(a, b)=\left(\dfrac{c}{2}, \dfrac{c}{2}\right)$　のときで，

このとき　$k=\sqrt{\left(\dfrac{c}{2}\right)^2+\left(\dfrac{c}{2}\right)^2}=\dfrac{c}{\sqrt{2}}$

また，kは　$(a, b)=(c, c)$　のときの値$\sqrt{c^2+c^2}=\sqrt{2}\,c$よりも小さい．

ゆえに　$\dfrac{c}{\sqrt{2}}\leqq\sqrt{a^2+b^2}<\sqrt{2}\,c$

2　数列$\{a_n\}$は次のように定められている．初項$a_1=0$であり，すべての自然数nに対して

$a_{n+1}=-a_n+\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$　が成り立つ．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　a_3，a_4を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　α を定数として $b_n=(-1)^n(a_n+\alpha)$ とおく．$\{b_n\}$ が等差数列になるためには α をどのように定めればよいか．α の値を求めよ．

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を n を用いて表せ．

(4)　数列 $\{a_n\}$ の第 $2n$ 項までの 2 乗の和　$S_{2n}=a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_{2n}{}^2$　を求めよ．

(1)　$a_1=0$ と $a_{n+1}=-a_n+\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$ により，$a_2=-a_1+\dfrac{1+(-1)^2}{2}=0+1=1$

$a_3=-a_2+\dfrac{1+(-1)^3}{2}=-1+0=\mathbf{-1}$　　$a_4=-a_3+\dfrac{1+(-1)^4}{2}=1+1=\mathbf{2}$

(2)　$\boxed{b_{n+1}-b_n}$ ◀―― **この計算結果がどうなれば「等差数列」に導けるか…**

$$=(-1)^{n+1}(a_{n+1}+\alpha)-(-1)^n(a_n+\alpha)=(-1)^{n+1}(a_{n+1}+\alpha)+(-1)^{n+1}(a_n+\alpha)$$
$$=(-1)^{n+1}(a_{n+1}+a_n+2\alpha)$$
$$=(-1)^{n+1}\left\{\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}+2\alpha\right\}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+2\alpha\right)(-1)^{n+1}$$

$\{b_n\}$ が等差数列になるためには，この値が n に関わらず一定になればよい．

よって　$\dfrac{1}{2}+2\alpha=0$　　$\boldsymbol{\alpha=-\dfrac{1}{4}}$

(3)　(2)より　$\alpha=-\dfrac{1}{4}$ のとき　$b_n=(-1)^n\left(a_n-\dfrac{1}{4}\right)$　……①　を満たす数列 $\{b_n\}$ は公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列．

また，$b_1=-\left(a_1-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$　　よって　$b_n=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}(n-1)=\dfrac{2n-1}{4}$

したがって，①より　$(-1)^n\left(a_n-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{2n-1}{4}$

両辺に $(-1)^n$ をかけることにより

$$a_n-\frac{1}{4}=(-1)^n\cdot\frac{2n-1}{4}$$

よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{4}\{1+(-1)^n\cdot(2n-1)\}}$

> (2)は明らかに(3)のための「誘導」．なぜ突然「等差数列」が出てきたのか疑問を持つかもしれない．しかしながら，与えられた漸化式を見て，(2)のような変形を行うことで等差数列になることに「気づけば」苦労しないわけで，多くの人が気づかないであろう．だからこそ(2)の誘導がある．それに乗れたかどうかが鍵．

(4)　(3)の結果より，k を自然数として

$a_{2k-1}=\dfrac{1}{4}\{-(4k-3)+1\}=-k+1$　　$a_{2k}=\dfrac{1}{4}\{(4k-1)+1\}=k$

よって　$S_{2n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}{}^2+a_{2k}{}^2)$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{(-k+1)^2+k^2\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-2k+1)$$
$$=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-n(n+1)+n=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(2n^2+1)}$$

> 「第 $2n$ 項までの和」の多くがこの「偶数項」と「奇数項」をそれぞれ n 項ずつ加えるという解法に至る．(1)で帰納的に項を導くことによりそれに気づくことは難しいかもしれないが，入試の世界においては典型的解法である．ここは誘導なしで導きたい．Σ の計算が 1 つですむこともポイント．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。